Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

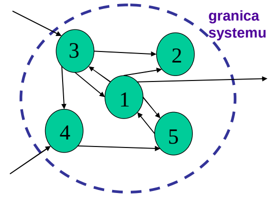
Wprowadzenie do mechatroniki

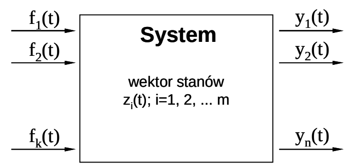
Opis systemu mechatronicznego

dr inż. Roland PAWLICZEK

Opis systemu mechatroniczego

- ***Proces:*** *ciąg kolejno następujących po sobie w czasie zjawisk lub stanów w systemie (przekształcanie lub transport energii, materii i informacji – co prowadzi do czasowych przebiegów sygnałów, stanów procesu).*
- ***Dynamika procesu:*** *proces zmienia się w czasie.*
- ***Wektor stanu:*** *opis stanu systemu →* ***z(t)***
- ***Więzy systemowe:*** *system i otoczenie oddziaływają na siebie poprzez* **-** *sygnały (prąd, napięcie, ciśnienie, droga, temperatura) opisane poprzez parametry (amplituda, częstotliwość) i charakterystyki sygnału (amplitudowo-częstotliwościowa)*





Opis systemu mechatroniczego

Funkcje kinematyczne: *przygotowanie elementów ruchomych (kinematyka, dynamika maszyn, teoria maszyn i mechanizmów).*

Funkcje kinetyczne: *uwzględnienie sił i momentów koniecznych do wykonania zadania*

Funkcje mechatroniczne: *powiązanie sensoryki, regulacji i członów wykonawczych (aktorów) w celu kontroli procesu*

Opis ruchu systemu mechatronicznego:

inercjalny układ współrzędnych $(KS)_0$ *– układ bazowy, globalny. Z reguły układ kartezjański, nieruchomy w przestrzeni,*

lokalny układ współrzędnych $(KS)_k$ *– układ sztywno związany z ciałem. Pozycja i orientacja rozpatrywanego ciała rozpatrywane są jako położenie i orientacja układu* $(KS)_k$ *w odniesieniu do układu* $(KS)_0$*,*

punkt obserwacji, punkt efektora (EP) *– miejsce geometryczne punktu, którego zachowanie (ruch) jest istotne dla procesu,*

współrzędne globalne efektora *– opisują pozycję i orientację efektora w układzie* $(KS)_0$ $\mathbf{x}:=[x,y,z,\phi,\psi,\theta]$

Opis systemu mechatroniczego

Opis ruchu systemu mechatronicznego:

współrzędne uogólnione *– współrzędnie niezależne, opisują położenie układu* $\mathbf{q}:=[q_1, q_2, \dots q_n]$

przestrzeń konfiguracji *– dopuszczalne zakresy współrzędnych uogólnionych* $Q:=\{\mathbf{q} \mid \mathbf{q}_{min} \le \mathbf{q} \le \mathbf{q}_{max}\}$

przestrzeń robocza i model kinematyczny

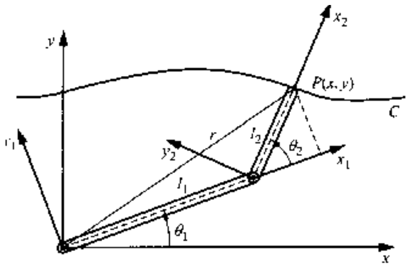
$X:=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = f(\mathbf{q}) \wedge \mathbf{q} \in Q\}$

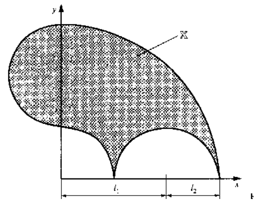
$\mathbf{x} = f(\mathbf{q})$ *– model kinematyczny, opisuje zależność pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi i globalnymi*

model kinetyczny *– opisuje związek między wielkościami ruchu* $\mathbf{q}(t)$ *lub* $\mathbf{x}(t)$*, a wielkościami siły* $\mathbf{Q}(t)$ *lub* $\mathbf{F}(t)=[\mathbf{F}_x(t), \mathbf{F}_y(t),] \mathbf{F}_z(t), \mathbf{M}_x(t), \mathbf{M}_y(t),] \mathbf{M}_z(t)]$*, zwykle daje to układy równań różniczkowych ruchu*

$$\mathbf{f}[\ddot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t)] = \mathbf{Q}(t)$$

Opis systemu mechatroniczego





Przestrzeń robocza dla $l_1 = 2l_2$

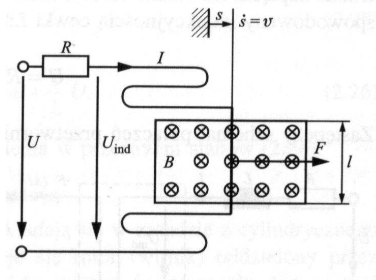
współrzędne uogólnione	$\mathbf{q} = [\ \theta_1, \theta_2\ ]$
przestrzeń konfiguracji	$Q = \{\ \theta_1, \theta_2 \mid 0 \le \theta_1 \le ½\pi;\ 0 \le \theta_2 \le \pi\}$
efektor	porusza się po torze C
układ o dwóch stopniach swobody	
układ wsp. lokalny	$(KS)_{1,2}$ początki układów w przegubach
model kinematyczny	$x = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2)$
	$y = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Do przetwarzania mocy elektrycznej na mechaniczną wykorzystuje się oddziaływanie pól elektromagnetycznych.
Zastosowanie: *rotacyjne maszyny elektryczne → silniki*

Przetworniki elektrodynamiczne

Wykorzystują powstawanie siły ***LORENTZA*** *→ gdy przewodnik z prądem porusza się w polu magnetycznym.*
Maszyna elementarna:



B – strumień magnetyczny
[B] = [Tesla] = [V·s/m²]

$\boldsymbol{F = BIl}$
niezależna od prędkości v

Napięcie indukowane (na skutek ruchu przewodnika z prędkością v):
$\boldsymbol{U_{ind} = Blv}$

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Bilans napięcia:	$U = RI + U_{ind}$	
Bilans mocy:	$P_{wej} = UI$;	$P_{str} = RI^2$;
	$P_{el} = U_{ind}I$	- skuteczna moc elektryczna
	$P_{el} = P_{wej} - P_{str}$	
	$P_{el} = P_{wyj}$	

Uzyskiwana moc mechaniczna:

$$P_{wyj} = Fv$$

$$U_{ind}I = UI - RI^2 = BIlv = Fv$$

Dla cewki z ***n*** *zwojami:* $U_{ind} = nBlv$

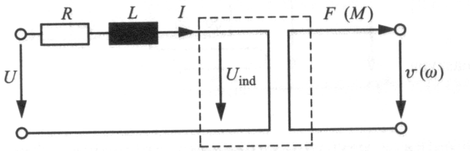
Cewka cechuje się spadkami napięcia na uzwojeniach:

$$U = RI + L\frac{dI}{dt} + U_{ind}$$

$$[L] = \left[\frac{V \cdot s}{A}\right] = [\Omega \cdot s]$$

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Schemat połączeń przetwornika elektrodynamicznego (maszyna elementarna):



Model matematyczny:

$F = kI$ siła proporcjonalna do natężenia prądu

$$P_{el} = P_{wyj} = Fv$$

$$U_{ind}I = Fv \rightarrow I = \frac{Fv}{U_{ind}} \quad \text{ale} \quad I = \frac{F}{k}$$

$$v = \frac{1}{k}U_{ind} = \frac{1}{k}nBLv \rightarrow k = nBl$$

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Model matematyczny cd. :

$$\begin{cases} U = RI + L\dfrac{dI}{dt} + U_{ind} & (1) \\ F = m\dfrac{dv}{dt} & (2) \\ F = kI & (3) \\ v = \dfrac{1}{k}U_{ind} & (4) \end{cases}$$

z (4) $U_{ind} = kv$

z (3) $I = \dfrac{1}{k}F$

otrzymamy:

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Model matematyczny cd. :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}F \\ \dfrac{dF}{dt} = -\dfrac{R}{L}F - \dfrac{k^2}{L}v + \dfrac{k}{L}U \end{cases} \rightarrow$$

wektor stanu : $z = [v, F]^T$

przestrzeń stanów :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -\frac{k^2}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{L} \end{bmatrix}U$$

lub

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}U$$

gdzie: A – macierz systemowa

b – wektor sterowania

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Przykład: dla równania różniczkowego

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 2u$$

i przyjętego wektora stanu [y,v]

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{du}{dt} + 2u = u(t)$$

***Wektor stanu** dla zmiennych **y** i **v** można zapisać jako*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -2v - 2y + u(t) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Wektor stanu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

Może być zapisany w krótszej formie jako

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

*gdzie: **u** jest wektorem wejściowym (sterowanie), **x** jest wektorem stanu, **A** i **B** macierze systemowe.*

*Można zdefiniowaćtzw. **Wektor wyjściowy** dla danego wektora stanu*

$$z = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

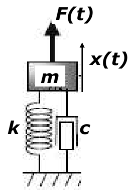
*where: **u** –wektor wejściowy, **x** wektor stanu,*

***C** – macierz wyjściowa modelu obiektu (jak zmienne wejściowe zależą od składowych wektora stanu),*

***D** – macierz przejścia modelu (jak zmienne wyjściowe zależą od wektora wejściowego– zwykle **D**=**0**).*

Opis systemu mechatronicznego – wektor stanu

Przykład: zawór



F – siła
m – masa
k – stała sprężyny
c – wsp. tłumienia
x – przemieszczenie

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}F(t)-\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}-\frac{k}{m}x$$

Opis systemu mechatronicznego – wektor stanu

Wektor stanu [x,v]ᵀ:

$$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}u$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v\\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{F(t)}{m}-\dfrac{c}{m}v-\dfrac{k}{m}x\end{cases}\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}F(t)$$

Zakładając wektor wyjściowy $z=\mathbf{C}x+\mathbf{D}u$ *w postaci*

$$\begin{bmatrix}F_{spr}\\F_{damp}\\x_{out}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\0 & c\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}F(t)$$

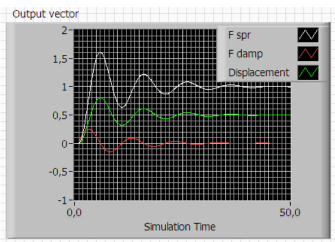
gdzie $\mathrm{F_{spr}=kx;}\qquad \mathrm{F_{damp}=cv;}\qquad \mathrm{x_{out}=x;}$

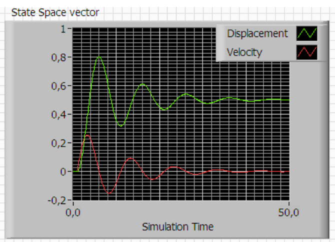
Opis systemu mechatronicznego – wektor stanu

*Dla wartości parametrów **m=5**, **c=1** i **k=2**:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0{,}4 & -0{,}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0{,}2\end{bmatrix}F(t)\qquad \begin{bmatrix}F_{spr}\\F_{damp}\\x_{out}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}F(t)$$

otrzymujemy wyniki

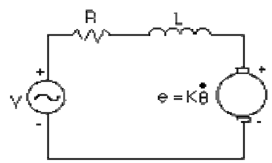


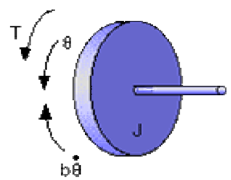


Opis systemu mechatronicznego – symulacja pracy

Schemat połączeń przetwornika elektrodynamicznego (maszyna elementarna):

Obwód elektryczny stojana i uwolniony z więzów model silnika:





Opis systemu mechatroniczego – symulacja pracy

*Moment obrotowy **T** jest związany z natężeniem prądu **i** w obwodzie za pomocą współczynnika proporcjonalności **K**, zaś napięcie indukowane **e** jest zależne od prędkości kątowej wirnika*

$$T = Ki$$

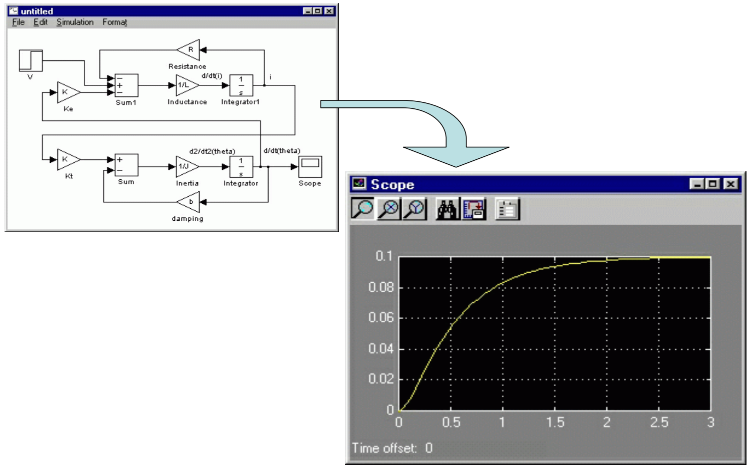
$$e = K\omega = K\frac{d\theta}{dt}$$

Wykorzystując prawo Kirchoffa dla obwodu elektrycznego oraz równanie dynamiki ruchu obrotowego wirnika można zapisać

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\frac{d\theta}{dt}$$

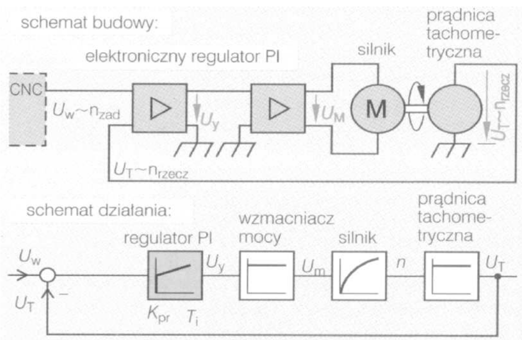
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = Ki$$

Opis systemu mechatroniczego – symulacja pracy



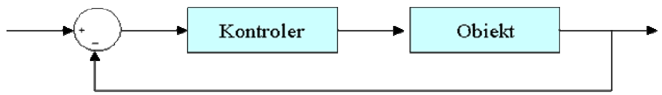
Opis systemu mechatroniczego – symulacja pracy

Regulacja prędkości obrotowej silnika:



Opis systemu mechatroniczego – symulacja pracy

Układ sprzężenia zwrotnego:



*Do sterowania pracą silnika przyjęto **regulator PI**: W regulatorze ze sterowaniem proporcjonalno - całkującym, wartość wyjściowa regulatora u(t) składa się z części proporcjonalnej do odchyłki regulacji oraz całki z odchyłki regulacji po czasie e(t)*

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt$$

K_p, K_i – *wzmocnienie członu proporcjonalnego i członu całkującego*

$e(t)$ – *uchyb, jako różnica pomiędzy wielkością zadaną a wielkością rzeczywistą*

Opis systemu mechatroniczego – symulacja pracy