



**Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA**

Mechatronika ***Sygnały czasowe i przetwarzanie sygnałów***

dr inż. Roland PAWLICZEK

1

Cele wykładu

- *Definicja pojęcia sygnały czasowe? Rodzaje sygnałów.*
- *Parametry statystyczne i charakterystyki sygnałów czasowych. Jak na ich podstawie sklasyfikować sygnał?*
- *Zastosowanie przekształcenia Fouriera do dekompozycji sygnałów czasowych. Gęstość widmowa mocy sygnału.*
- *Struktura układu pomiarowego, szerokość pasma częstotliwości.*
- *Przetworniki A/C i C/A.*
- *Dyskretyzacja sygnału analogowego.*
- *Filtry cyfrowe*

Przykład sygnału czasowego

2

Sygnały

Sygnały – informacje przesyłane pomiędzy elementami systemu mechatronicznego w postaci impulsów elektrycznych (ciągłych lub dyskretnych) reprezentujące przemieszczenia, siły, prędkości, przyspieszenia itp.

W systemach mechatronicznych coraz szerzej stosuje się sygnały dyskretne ze względu na łatwość i szybkość ich przetwarzania.

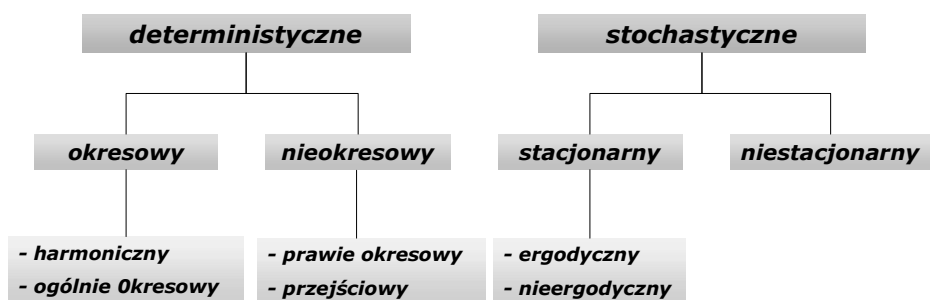
Sygnały zwykle istnieją jako skalarne funkcje czasu.

$$x = x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Zakres czasowy $[t_0, t_1]$ zwykle jest przedziałem skończonym, jednak w rozpatrywaniu teoretycznym może przyjmować granice $[-\infty, +\infty]$.

Zastosowanie techniczne ma tzw. **sygnał obserwowany** $[0, T_{\text{pom}}]$ (czas pomiaru)

Sygnały – podział

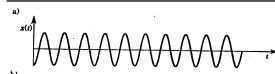


Sygnały deterministyczne – przedstawione za pomocą matematycznych formuł opisujących zjawisko fizyczne reprezentowane przez sygnał

układ sprężyna-masa → przemieszczenie masy $x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$

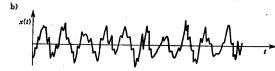
Sygnały stochastyczne – losowe, niemożliwe do opisanie modelami matematycznymi. W technice znajdują zastosowanie głównie sygnały stacjonarne oraz analiza sygnałów zakłóceń.

Sygnaly – parametry statystyczne



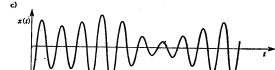
ekstremum :

$$\bar{x} = \max[x(t)] \quad \bar{x} = \min[x(t)]$$



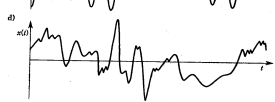
wartość średnia :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$



wariancja :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt$$



odchylenie standardowe :

$$\sigma_x$$

asymetria :

$$\gamma_x = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^3 dt$$

kurtuoza :

$$\beta_x = \frac{1}{\sigma_x^4} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^4 dt$$

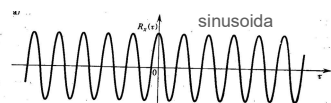
5

Sygnaly – charakterystyki

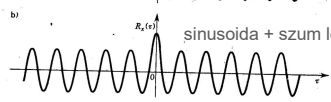
funkcja autokorelacji :

$$R_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt$$

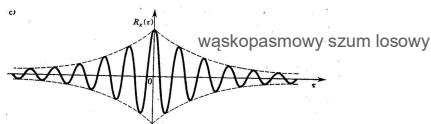
autokorelacja : charakteryzuje ogólną zależność wartości sygnału w pewnej chwili od wartości w innej chwili.



sinusoida



sinusoida + szum losowy



wąskopasmowy szum losowy



szerokopasmowy szum losowy

Dla sygnałów harmonicznych funkcja autokorelacji nie zmienia się w czasie w przeciwieństwie do przebiegów losowych, dla których dąży ona do zera dla dużych przesunięć czasowych. Pozwala ona na wykrywanie przebiegów zdeterminowanych maskowanych przez szum losowy.

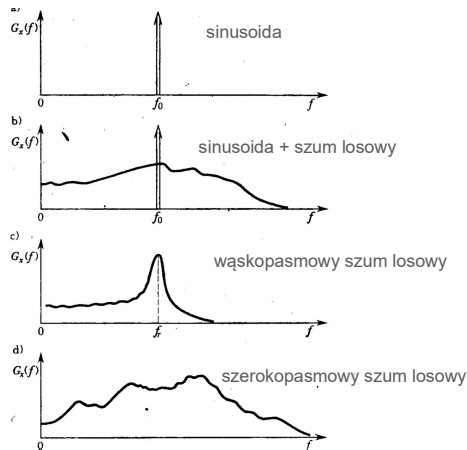
6

Sygnaly – charakterystyki

widmowa gęstość mocy :

$$G_{xx} = F(R_{xx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

gęstość widmowa : opisuje strukturę częstotliwościową sygnału



7

Przekształcenie Fouriera

- Sygnał może być przedstawiony za pomocą kombinacji pewnej liczby funkcji sinus i kosinus o różnych amplitudach i częstotliwościach (dekompozycja sygnału)
- Przebieg czasowy $F(t)$ może być przedstawiony za pomocą szeregu Fouriera jako

$$F(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_0 t)$$

- gdzie: częstość podstawowa $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

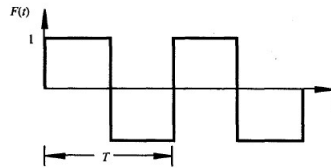
$$A_0 \rightarrow A_n \text{ dla } n = 0$$

8

Przekształcenie Fouriera

Dla przebiegu prostokątnego

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T/2 \\ -1 & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$



współczynniki szeregu

$$A_0 = 0, \text{ and } A_n = 0$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt - \int_{T/2}^T \sin(n\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(-\frac{1}{n\omega_0} [\cos(n\omega_0 t)]_0^{T/2} + \frac{1}{n\omega_0} [\cos(n\omega_0 t)]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \{-\cos(n\pi) + 1 + 1 - \cos(n\pi)\} = \frac{2}{n\pi} \{1 - \cos(n\pi)\} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{dla } n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & \text{dla } n = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \end{aligned}$$

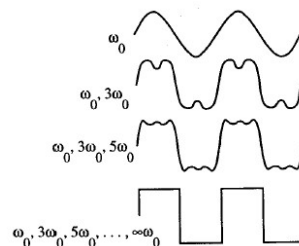
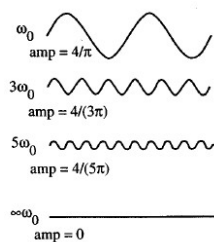
9

Przekształcenie Fouriera

- Szereg Fouriera dla amplitudy sygnału $A=1$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{4}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)\omega_0 t] \end{aligned}$$

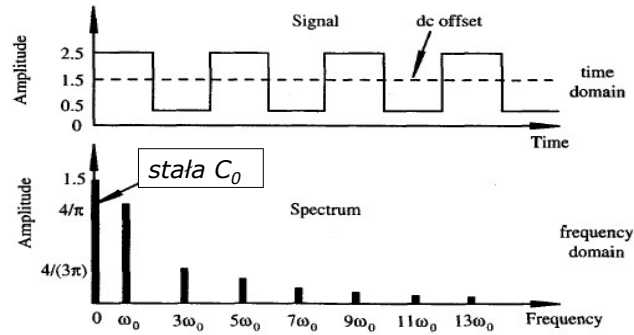
- dla wyższych częstotliwości amplituda składowej harmonicznnej maleje
- im więcej składowych harmonicznnych, tym lepsze odwzorowanie sygnału



10

Przekształcenie Fouriera

Reprezentacja sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości



11



**Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA**

Mechatronika
Dyskretyzacja – konwersja AC

dr inż. Roland PAWLICZEK

12

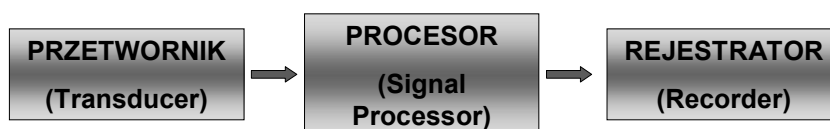
Cel wykładu

- **Zapoznanie się ze strukturą układu pomiarowego**
- **Zagadnienie dyskretyzacji sygnału analogowego**
 - *Aliasing*
 - *Okna czasowe*
- **Filtry**

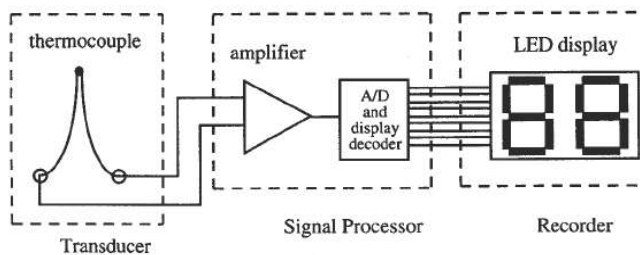
13

Elementy układu pomiarowego

- **Przetwornik:** czujnik, którego głównym zadaniem jest zamiana mierzonej wielkości fizycznej na sygnał elektryczny.
- **Procesor:** układ cyfrowy filtrujący zakłócenia i wzmacniający sygnał.
- **Rejestrator:** zapisuje i wyświetla informacje z procesora.



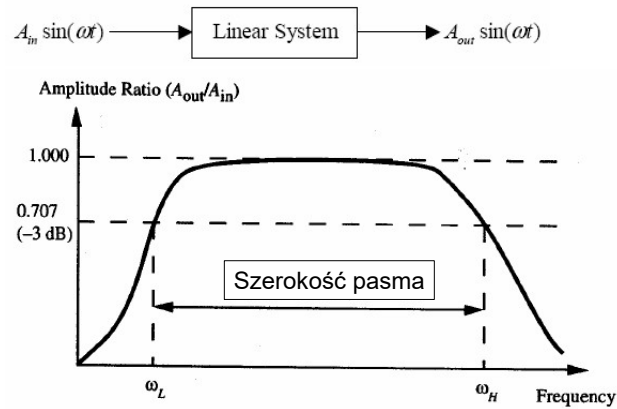
- **Przykład:**
termometr
cyfrowy



14

Szerokość pasma częstotliwości

Jest to zakres częstotliwości, które układ pomiarowy może w sposób dokładny odwzorować. Przyjmuje się, że tłumienie amplitudy sygnału przenieszonego nie powinno być większe niż 3dB.

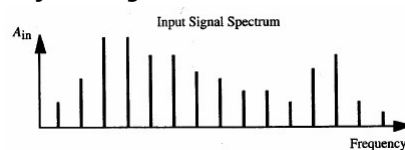


ω_L, ω_H – dolna i górna częstotaść odcinająca

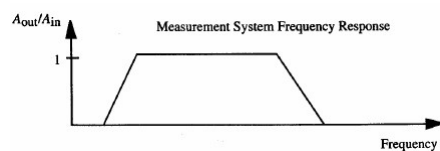
15

Szerokość pasma częstotliwości

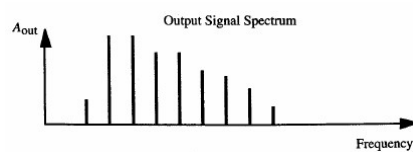
- widmo sygnału wejściowego



- charakterystyka pasma częstotliwości



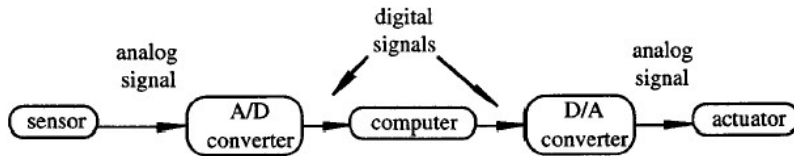
- widmo sygnału wyjściowego



16

Sygnaly - konwersja

Układ wykorzystujący konwertery analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe

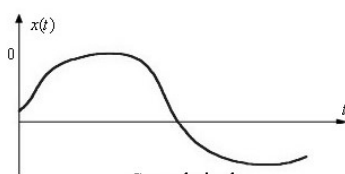


17

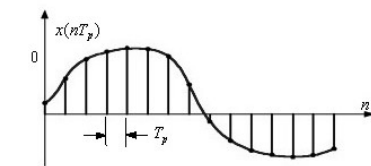
Sygnaly - konwersja

Sygnałem ciągłym w czasie jest funkcja $x(t)$, której dziedziną jest każdy punkt pewnego przedziału osi czasu.

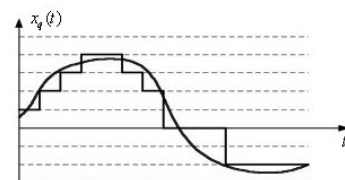
Sygnałem dyskretnym w czasie jest funkcja $x[n]$, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.



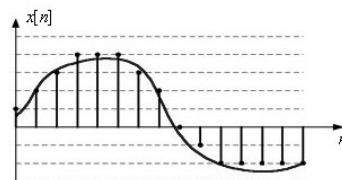
Sygnał ciągły



Sygnał próbkowany (dyskretny w czasie)



Sygnał skwantowany
(dyskretny w wartościach, czasowo ciągły)

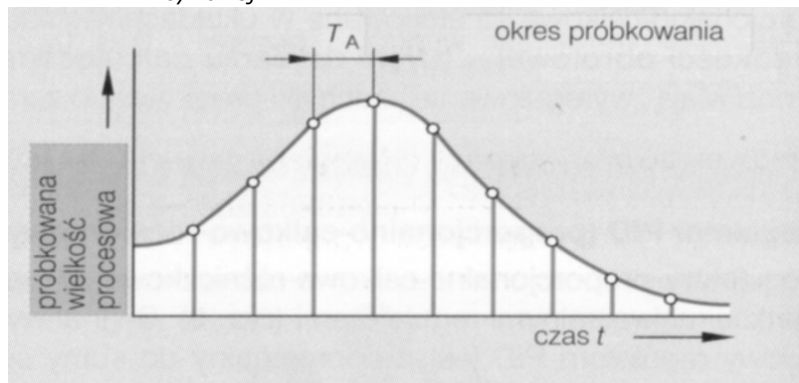


Sygnał cyfrowy
(dyskretny w czasie i w wartościach)

18

Sygnały dyskretne : konwersja analogowo-cyfrowa

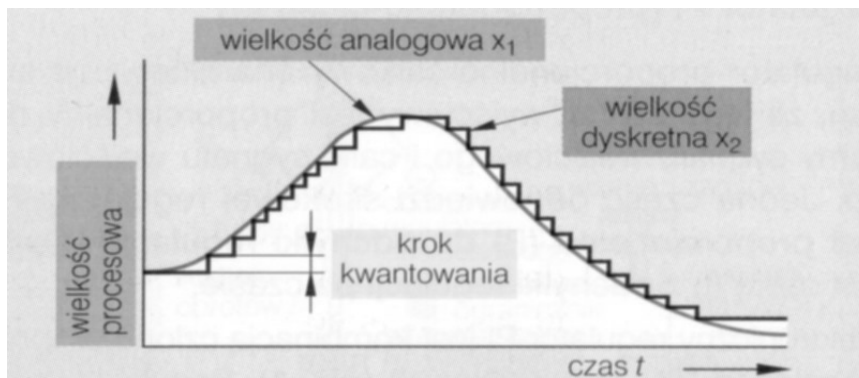
- **Próbkowanie:** odczytywanie sygnału czasowego w równoodległych chwilach czasowych T_A (np. co 1 ms)
 - częstotliwość próbkowania: $f_A = 1/T_A$ – zależy od prędkości komunikacji i przetwarzania komputera, wykonywanych zadań obliczeniowych, liczby obsługiwanych układów regulacji cyfrowej.



19

Sygnały dyskretne : konwersja analogowo-cyfrowa

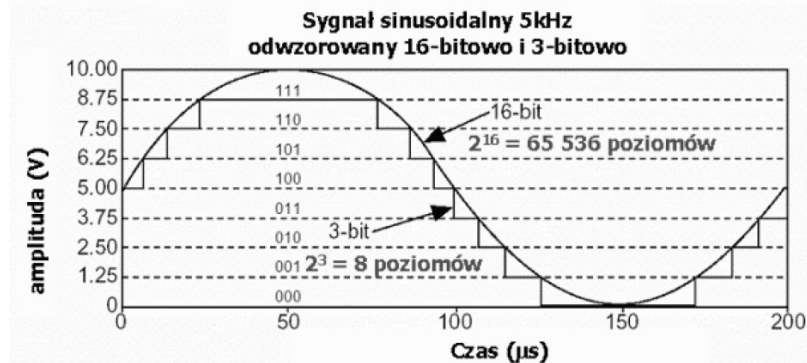
- W celu obróbki cyfrowej sygnał ciągły musi zostać odczytany w sposób nieciągły i zapisany jako wartość i chwila czasowa (**kwantowanie**).



20

Sygnały dyskretne : konwersja analogowo-cyfrowa

Rozdzielczość próbkowania



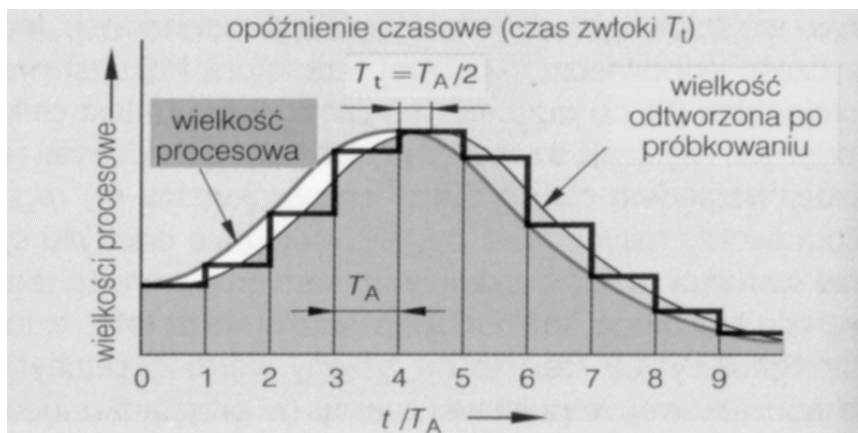
$$\text{krok kwantowania} = \frac{\text{zakres pomiarowy}}{2^{\text{rozdzielczość przetwornika}}}$$

$$\text{np. } \frac{10V}{2^{16}} \approx 0,000153V = 0,153mV$$

21

Sygnały dyskretne : kwantowanie

- **Czas zwłoki:** próbkowanie razem z zapamiętywaniem stanu sygnału do momentu zmiany przedziału powoduje powstanie przy odtwarzaniu sygnału przesunięcia czasowego: $T_t = \frac{1}{2} T_A$



22

Sygnały dyskretne

Przykład: Sygnał procesowy charakteryzuje się częstotliwością zmian $f_P = 20\text{Hz}$ i jest próbkowany z częstotliwością $f_A = 100\text{Hz}$. Oblicz czas zwłoki T_t oraz przesunięcie fazowe próbkowanego sygnału względem sygnału procesu. Jak zmniejszyć ten efekt?

$$T_t = \frac{T_A}{2} = \frac{1}{2f_A} = \frac{1}{2 \cdot 100\text{Hz}} = 0,005\text{s}$$

dla $f_A = 200\text{Hz}$

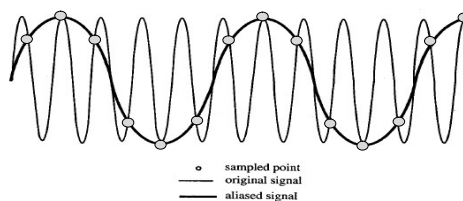
$$T_t = \frac{T_A}{2} = \frac{1}{2f_A} = \frac{1}{2 \cdot 200\text{Hz}} = 0,0025\text{s}$$

Wniosek: zwiększać częstotliwość próbkowania ???

23

Sygnały dyskretne : aliasing

- Z próbkowaniem związany jest efekt aliasingu



Aliasing

- Czas pomiaru T określa szerokość pasma częstotliwości

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

- Dla sygnału ograniczonego pasmem można uniknąć efektu aliasingu, gdy częstotliwość próbkowania f_A spełnia warunek

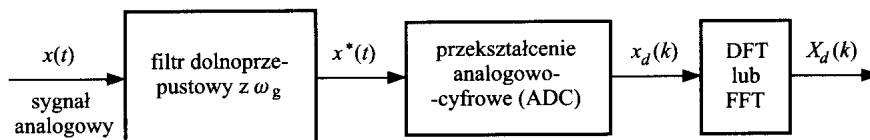
$$f_A = \frac{1}{T_A} > 2f_{\max}$$

gdzie $f_{\max}$ jest największą występującą w sygnale częstotliwością

24

Sygnały dyskretne : aliasing

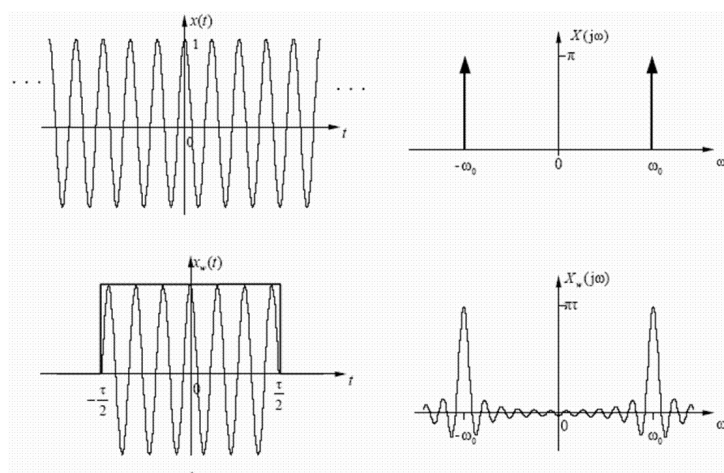
W zastosowaniach praktycznych ograniczenie pasma jest realizowane przez filtr antyaliasingowy (filtr dolnoprzepustowy o ograniczonej częstotliwości kołowej ω_g) połączony szeregowo z członem odczytującym.



25

Sygnały dyskretne : przecieki

Wpływ skończonego czasu obserwacji.



26

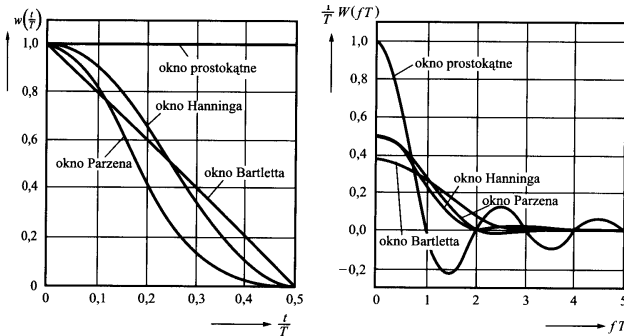
Sygnały dyskretne : przecieki

Błędy obcięcia : powstają, gdy przekształcenia Fouriera stosowane są dla skończonego przedziału czasowego lub używany jest tylko wycinek przebiegu czasowego sygnału. Powodują one fałszowanie widmowej gęstości mocy sygnału.

Okno czasowe : „przepuszcza” wartości chwilowe sygnału według określonej wagi:

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t)$$

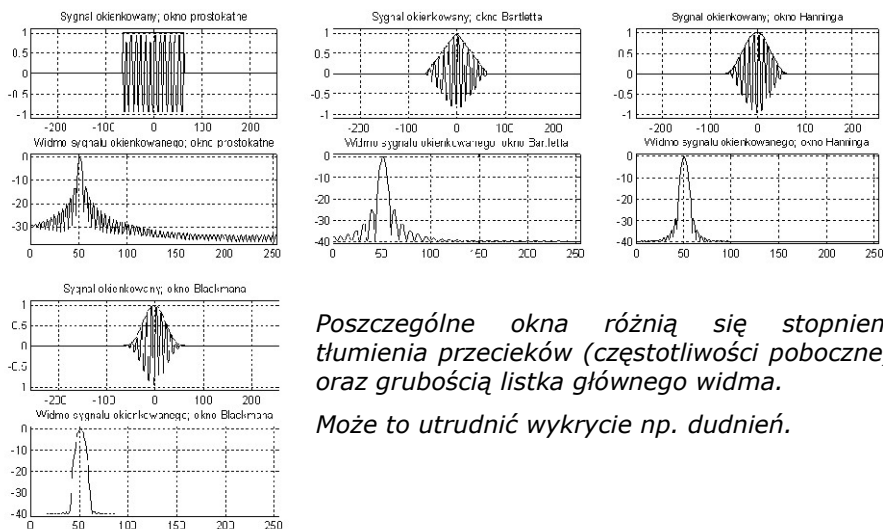
gdzie: $x(t)$ – sygnał oryginalny, $w(t)$ – funkcja okna czasowego.



Przykład okien czasowych

27

Sygnały dyskretne : przecieki



Poszczególne okna różnią się stopniem tłumienia przecieków (częstotliwości poboczne) oraz grubością listka głównego widma.

Może to utrudnić wykrycie np. dudnień.

28

Filtrowanie sygnałów

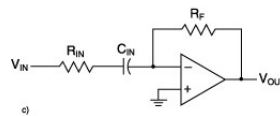
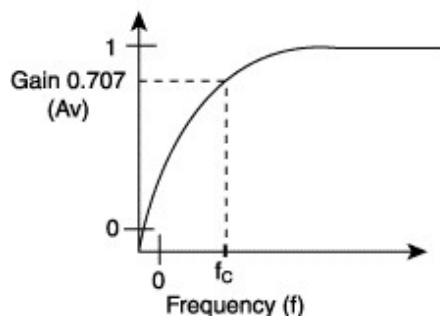
- Systemy elektroniczne wymagają, aby pewne zakresy częstotliwości sygnałów były używane, zaś inne odrzucane.
- Urządzenia wykonujące te zadanie nazywamy filtrami.
- Filtry elektroniczne są zbudowane z rezystorów i kondensatorów.
- Filtry pasywne:
 - Nie posiadają składników aktywnych, np. tranzystory.
 - Sygnał wyjściowy nie jest większy od sygnału wejściowego.
 - Nie wymagają dodatkowego zasilania.
- Filtry aktywne:
 - Współpracują z tranzystorami.
 - Sygnał wyjściowy jest większy od wejściowego zależnie od wzmocnienia.
 - Wymaga dodatkowego zasilania.

29

Filtrowanie sygnałów

Filtry górnoprzepustowe – są to układy, które przepuszczają sygnały o częstotliwościach wyższych aniżeli pewna zadana częstotliwość graniczna (odcięcia).

b)



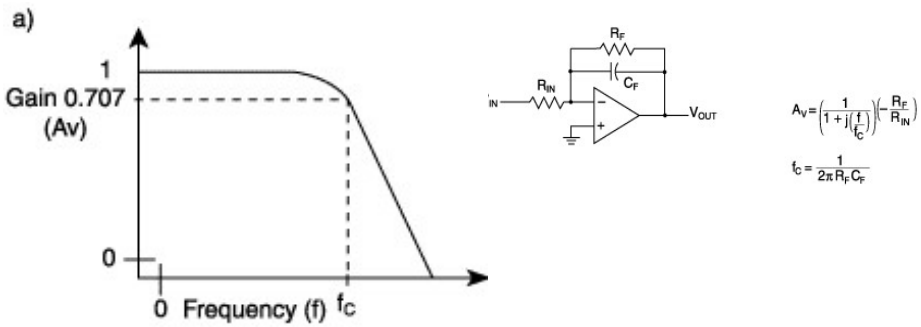
$$A_v = \left(\frac{1}{1 - j \left(\frac{f}{f_c} \right)} \right) \left(- \frac{R_F}{R_{IN}} \right)$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_{IN} C_{IN}}$$

30

Filtrowanie sygnałów

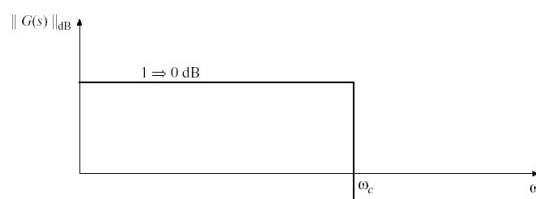
Filtry dolnoprzepustowe – są to układy, które przepuszczają sygnały o częstotliwościach niższych aniżeli pewna zadana częstotliwość.



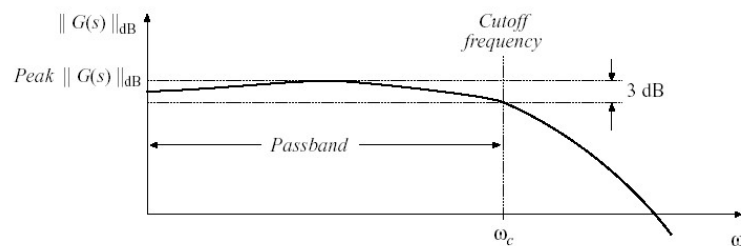
31

Filtrowanie sygnałów

Idealny: niemożliwy w realizacji



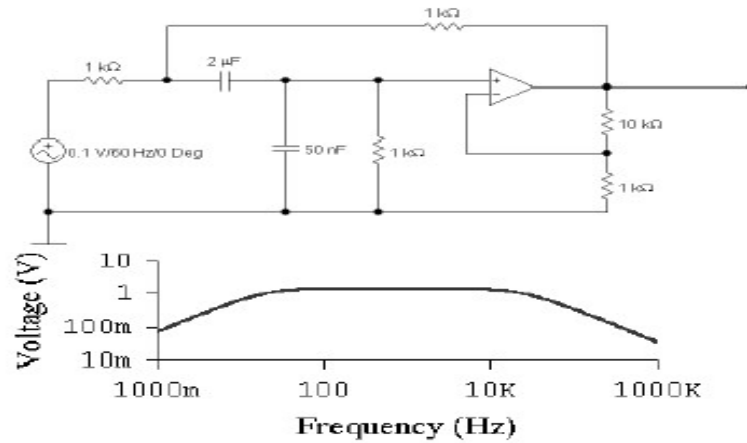
Rzeczywisty:



32

Filtrowanie sygnałów

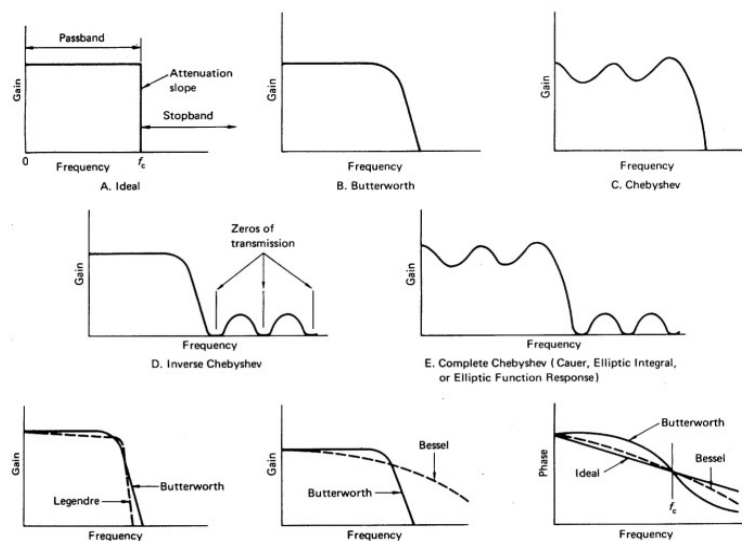
Filtry środkowo-przepustowe (pasmowe) – są to filtry, które przepuszczają sygnał z pewnego pasma częstotliwości.



33

Filtrowanie sygnałów

Typy filtrów



34

Filtrowanie sygnałów

Filtr Butterwortha

$$G(s) = \frac{1}{B(s)}$$

$B(s)$ = Butterworth polynomial (below)

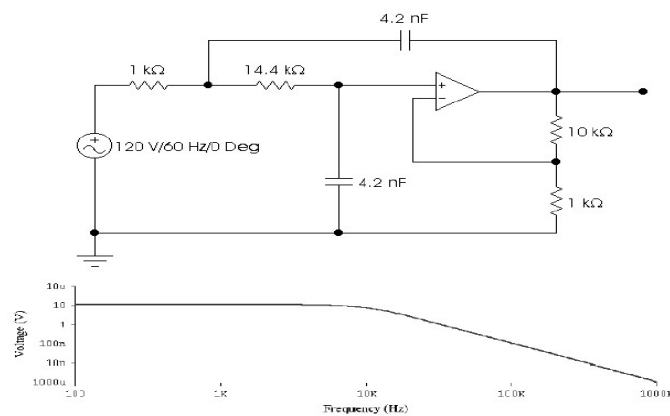
$B(s)$ is a polynomial containing complex roots evenly spaced in the left half-plane around a circle of radius ω_c .

n	$B(s)$
1	$\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)$
2	$\left(1 + \sqrt{2} \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2\right)$
3	$\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2\right)$
4	$\left(1 + 0.7654 \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2\right)\left(1 + 1.848 \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2\right)$

35

Filtrowanie sygnałów

Filtr Butterwortha

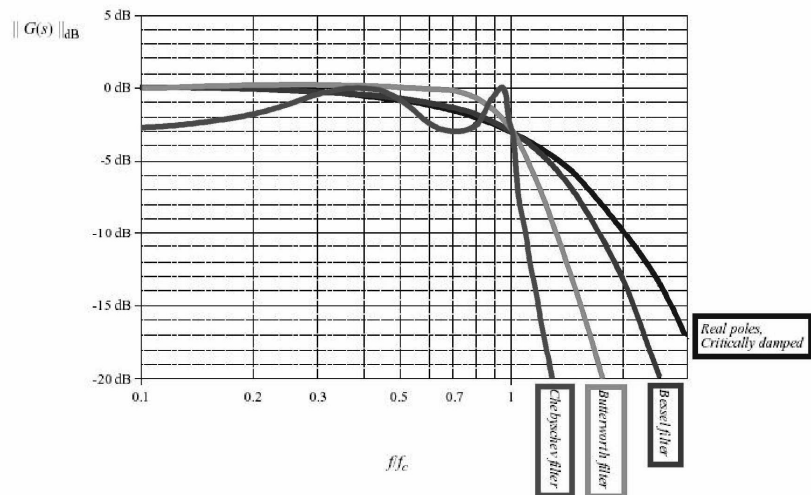


$$f_c = 1 / (2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2})$$

36

Filtrowanie sygnałów

Porównanie filtrów



37

Filtrowanie sygnałów

Porównanie filtrów

Butterwortha	maksymalnie płaska charakterystyka amplitudowa odpowiedzi	najbardziej popularny filtr, powszechnie stosowany
Chebyshev	stałoamplitudowe falowanie w paśmie przepuszczanym	krzywa tłumienia bardziej stroma w pobliżu częstotliwości granicznej aniżeli f. Butterwortha
Odwrrotny Chebysheva	stałoamplitudowe falowanie w paśmie zaporowym	brak falowania w paśmie przepustowym, całkowite tłumienie pewnych częstotliwości w paśmie zaporowym

38

Filtrowanie sygnałów

Porównanie filtrów

<i>Zupełny Chebysheva</i>	<i>stałoamplitudowe falowanie w paśmie przepuszczanym i paśmie zaporowym</i>	<i>całkowite tłumienie pewnych częstotliwości w paśmie zaporowym</i>
<i>Legendre'a</i>	<i>brak falowania w paśmie przepuszczanym, krzywa tłumienia bardziej stroma w pobliżu częstotliwości granicznej aniżeli f. Butterwortha</i>	<i>gorsza charakterystyka amplitudowa odpowiedzi aniżeli f. Butterwortha</i>
<i>Bessela- Thomsona</i>	<i>charakterystyka fazowa bliska idealnej w paśmie przepuszczanym</i>	<i>niekorzystna krzywa tłumienia</i>

39

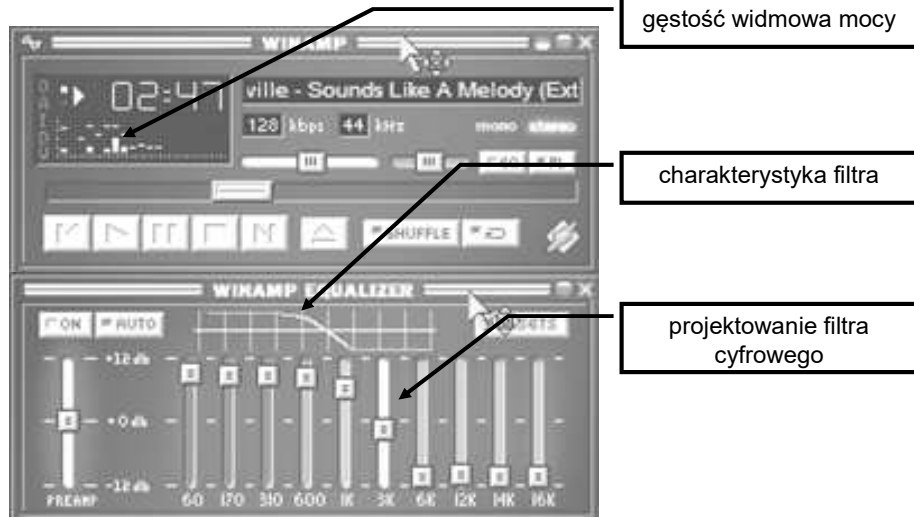
Filtrowanie sygnałów

Przykład zastosowania analizy i filtrowania sygnału

40

Filtrowanie sygnałów

Przykład zastosowania analizy i filtrowania sygnału



41