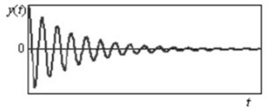
Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

MECHATRONIKA
STABILNOŚĆ SYSTEMÓW MECHATRONICZNYCH

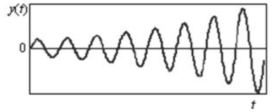
dr inż. Roland PAWLICZEK

Pojęcie stabilności

- ***Stabilność:*** *zdolność układu do przywracania równowagi w razie jej zakłócenia. Stabilność charakteryzuje właściwości dynamiczne układu, które są warunkiem jego prawidłowej pracy.*
  - *jeżeli y(t) jest miarą wytrącenia z poziomu równowagi to:*



system stabilny



system niestabilny

Pojęcie stabilności

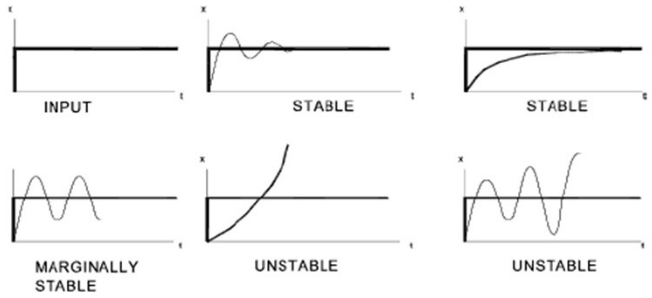
- ***Destabilizacja:*** *wytrącenie ze stanu równowagi*
  - *sprzężenie w wzmacniaczach i układach nagłaśniających audio. Chodzi tu o charakterystyczny pisk w głośnikach wywołany zbliżeniem mikrofonu do głośnika. Mała odległość między mikrofonem a głośnikiem powoduje niestabilność systemu.*
  - *utrata stabilności mostu w wyniku podmuchów wiatru. Silne podmuchy wiatru mogą spowodować oscylacje mostu w wyniku, których jego konstrukcja może zostać naruszona.*

Pojęcie stabilności

- ***Destabilizacja:*** *wytrącenie ze stanu równowagi*

Pojęcie stabilności

Stabilność układu jest odnoszona do sygnału wejściowego:



Pojęcie stabilności

- ***Rodzaje stabilności:***
  - *asymptotyczna – gdy układ po wytrąceniu ze stanu równowagi powraca do stanu równowagi poprzedniej*
  - *zwykła – gdy układ po wytrąceniu ze stanu równowagi przyjmuje nowy stan równowagi różny od stanu równowagi poprzedniej*

Warunki stabilności

- ***Transmitancja układu***

$$G(s)=\frac{L(s)}{M(s)}$$

Przyrównując mianownik do zera otrzymujemy tzw. równanie charakterystyczne

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

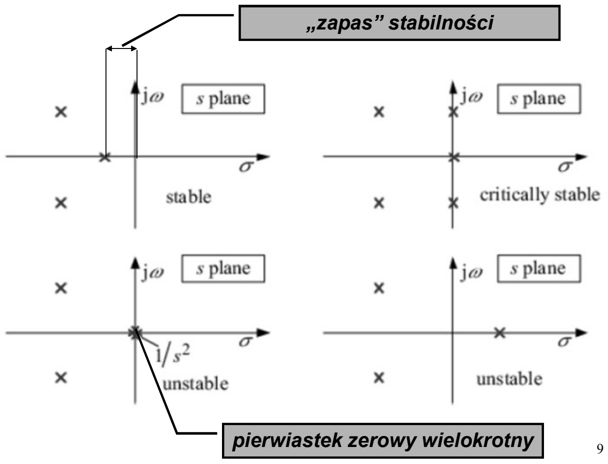
którego rozwiązaniem jest n pierwiastków $s_{1,2\,\ldots\,n}$

Warunki stabilności

- ***Warunki stabilności układu***
  - *Stabilność asymptotyczna: wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny transmitancji) musza znajdować się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, czyli wszystkie pierwiastki rzeczywiste oraz wszystkie części rzeczywiste pierwiastków zespolonych powinny być ujemne*
  - *Stabilność zwykła: pierwiastki równania charakterysty-cznego są rozmieszczone na płaszczyźnie zespolonej tak, ze żaden z nich nie znajduje się w prawej półpłaszczyźnie, natomiast na osi urojonej występują pierwiastki pojedyncze (co najwyżej jeden równy zero).*

w praktyce wymaga się aby układ był stabilny asymptotycznie

Warunki stabilności



Kryteria oceny stabilności

Kryteria algebraiczne *umożliwiają sprawdzenie czy układ jest asymptotycznie stabilny na podstawie zależności miedzy współczynnikami równania charakterystycznego*

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

gdzie wszystkie współczynniki a_i dla i = 0...n są rzeczywiste.

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Wprowadzenie: *dla równania różniczkowego 2-go stopnia*

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Jeżeli to równanie ma pierwiastki (bieguny) stabilne -a i -b, to

$$(s+a)(s+b) = 0$$
$$s^2 + (a+b)s + ab = 0$$

Z porównania równań i faktu a>0, b>0 wynika, że

$$a_1 = a + b > 0, \quad a_0 = ab > 0$$

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Twierdzenie pomocnicze:

Jeżeli $a_1>0$ oraz $a_0 > 0$, to układ regulacji, którego wielomianem charakterystycznym jest

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

jest asymptotycznie stabilny.

a dalej można zapisać:

Jeżeli współczynniki a_2, a_1, a_0 mają ten sam znak, to układ regulacji, którego wielomianem charakterystycznym jest

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

jest asymptotycznie stabilny.

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

- ***Przykład***

wielomian charakterystyczny	stabilność
$s^2+s+1=0$	Takie same znaki - asymptotycznie stabilny
$s^2+s-1=0$	Różne znaki - niestabilny
$-s^2+s-1=0$	Różne znaki - niestabilny
$-s^2-s-1=0$	Takie same znaki - asymptotycznie stabilny

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

czy można twierdzić:

Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianem charakterystycznego

$$a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

są jednakowego znaku, to układ jest asymptotycznie stabilny.

Twierdzenie prawdziwe:

$$(s+1)(s+1)(s+1)(s+1)(s+1) = s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+1=0$$

Twierdzenie fałszywe:

$$(s+1)(s+1)(s+1)(s+i)(s-i) = s^5+3s^4+4s^3+3s+1=0$$

Wniosek

Warunek na ten sam znak jest warunkiem koniecznym, ale nie dostatecznym.

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Dla wielomianu 3-go stopnia na granicy stabilności (s=jω):

$$\begin{aligned}
&a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = \\
&a_3 (j\omega)^3 + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0 = \\
&-a_3 j\omega^3 - a_2\omega^2 + a_1 j\omega + a_0 = \\
&\left(-a_2\omega^2 + a_0\right) + j\omega\left(-a_3\omega^2 + a_1\right) = 0
\end{aligned}$$

przy zerowaniu części rzeczywistej i urojonej:

$$\begin{cases} -a_2\omega^2 + a_0 = 0 \\ j\omega\left(-a_3\omega^2 + a_1\right) = 0 \end{cases} \qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega^2 = \frac{a_1}{a_3} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Zapisując warunki dodatnich wartości współczynników w postaci wyznaczników dla wielomianów stopnia 1 , 2 i 3:

$$\boxed{\Delta_1 = |a_1| > 0} \qquad \boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Lub w postaci ogólnej (tzw. macierz Hurwitza)

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Twierdzenie Hurwitza:
Układ regulacji opisany równaniem charakterystycznym

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

jest asymptotycznie stabilny (ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej s) wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczniki Δ_1, ..., Δ_n utworzone z macierzy Hurwitza są dodatnie.

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Algorytm postępowania:

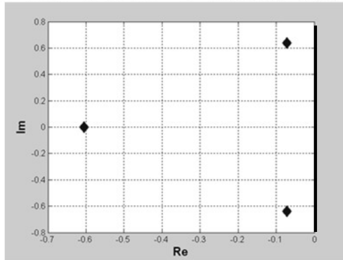
1. *Wyznaczamy transmitancję układu. Po przyrównaniu mianownika transmitancji do zera otrzymujemy równanie charakterystyczne stopnia n.*
2. *Sprawdzamy czy współczynniki a_i dla i=0...n są tego samego znaku.*
3. *Wyznaczamy kolejne wyznaczniki Δ_i i sprawdzamy czy są większe od zera*
4. *Jeżeli obydwa warunki są spełnione układ jest stabilny.*

Ocena stabilności – kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza ma znaczenie historyczne. Obecnie w zagadnieniach inżynierskich można zastosować pakiety obliczeniowe np. Matlab, Scilab (darmowy), Octave, SysQuake.

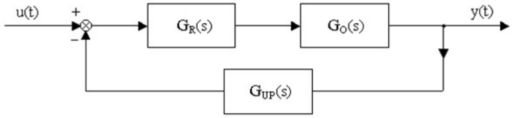
Bieguny równania $4s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$ *można rozwiązać w MATLAB-ie:*

```
» roots([4 3 2 1])
ans =
  -0.6058
  -0.0721 + 0.6383i
  -0.0721 - 0.6383i
```



Ocena stabilności – kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista *jest wykorzystywane do badania układów ze sprzężeniem zwrotnym (układów zamkniętych).*

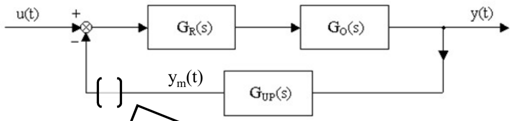


$$G_Z(s) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{G_O(s)\cdot G_R(s)}{1 + G_O(s)\cdot G_R(s)\cdot G_{UP}(s)} = \frac{G_O(s)\cdot G_R(s)}{1 + G_{OT}(s)}$$

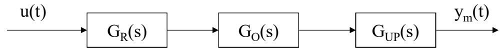
gdzie $G_O(s)$-transmitancja obiektu
$G_R(s)$- transmitancja regulatora
$G_{UP}(s)$-transmitancja urządzenia pomiarowego
$G_{OT}(s)= G_O(s)*G_R(s)*G_{UP}(s)$ – transmitancja układu otwartego

Ocena stabilności – kryterium Nyquista

Układ zamknięty: $G_Z(s) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{G_O(s)\cdot G_R(s)}{1 + G_O(s)\cdot G_R(s)\cdot G_{UP}(s)} = \frac{G_O(s)\cdot G_R(s)}{1 + G_{OT}(s)}$



Układ otwarty:



$$G_{OT}(s)= G_O(s)\cdot G_R(s)\cdot G_{UP}(s)$$

Ocena stabilności – kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista pozwala na badanie stabilności układu zamkniętego na podstawie przebiegu wykresu funkcji $G_O(j\omega)$ układu otwartego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

W praktycznych zastosowaniach kryterium Nyquista jest szczególnie przydatne w przypadku, gdy układ otwarty jest stabilny.
Można wtedy korzystać z przebiegu charakterystyki $G_O(j\omega)$ układu otwartego zdjętej doświadczalnie, co pozwala na badanie stabilności także układu, którego opis matematyczny nie jest znany.

Ocena stabilności – kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista:

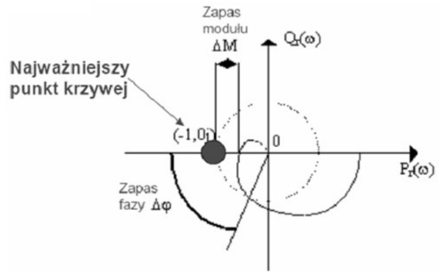
1. *Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie, to układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie wówczas, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_O(j\omega)$ przy zmianach pulsacji ω od zera do ∞ nie obejmuje punktu (-1,j0).*
2. *Jeżeli układ otwarty jest niestabilny i jego transmitancja ma l_O biegunów w prawej półpłaszczyźnie to układ zamknięty jest stabilny wówczas, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_O(j\omega)$ przy zmianach pulsacji ω od zera do ∞ nie obejmuje punktu (-1,j0)*
   reguła lewej strony → układ zamknięty jest stabilny, jeżeli przy wzroście ω od 0 do ∞ , punkt (-l,j0) znajduje się w obszarze po lewej stronie wykresu

Ocena stabilności – kryterium Nyquista

Algorytm postępowania:

1. *Wyznaczamy transmitancję $G_O(s)$ układu otwartego.*
2. *Podstawiamy jω za s i otrzymujemy $G_O(j\omega)$ w postaci $G_O(j\omega) = Re + j\, Im$.*
3. *Wyznaczamy wartość ω dla której $Im\, G_O(j\omega)=0$, następnie sprawdzamy czy spełniony jest warunek $ReG_O(j\omega) > -1$, jeżeli warunek ten jest spełniony oznacza to ze układ jest stabilny.*

Ocena stabilności – kryterium Nyquista



Zapas wzmocnienia *(modułu) jest wielkością wzmocnienia w decybelach (dB), która może być dodana do pętli nie powodując niestabilności.*
Zapas fazy *jest wartością czystego opóźnienia fazowego które dodane do pętli doprowadza go do niestabilności.*

Ocena stabilności – kryterium Nyquista

- *Kiedy wykres Nyquista nie przecina osi liczb rzeczywistych przy żadnej skończonej częstotliwości to wówczas zapas wzmocnienia jest nieskończony co oznacza, że teoretycznie wartość wzmocnienia pętli może być zwiększana do nieskończoności.*
- *Kiedy wykres Nyquista przechodzi przez punkt (−1, j0), zapas wzmocnienia wynosi 0 dB, co oznacza, że wzmocnienie pętli nie może być zwiększane gdyż układ znajduje się na granicy stabilności.*
- *Kiedy przecięcie fazy znajduje się z lewej strony punktu (−1, j0), zapas wzmocnienia jest ujemny i wzmocnienie pętli musi być zmniejszone aby uzyskać stabilność układu.*

Ocena stabilności – kryterium Nyquista