Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

Wprowadzenie do Mechatroniki

Zastosowanie przekształceń Laplace'a
Transmitancja operatorowa

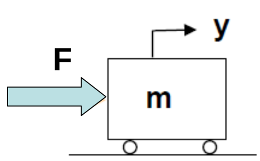
dr inż. Roland PAWLICZEK

Trochę matematyki...

- *Zwykle obiekty charakteryzują się pewną dynamiką – oznacza to, że wyjście obiektu jest funkcją sygnału wejściowego zależną od czasu.*
- *Matematycznie można to opisać równaniem*

$$y(t) = f\,[x(t)],\ 0<t<T$$

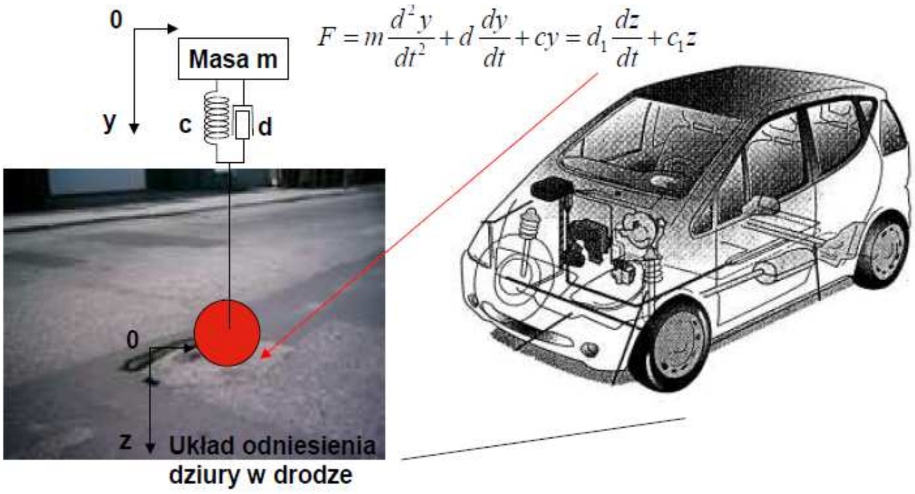
Przykład: poruszająca się masa
m - masa
y - przemieszczenie
x → F -siła
Model (przy pominięciu oporów):



$$my'' = F$$

Trochę matematyki…

$$F = m\frac{d^2 y}{dt^2} + d\frac{dy}{dt} + cy = d_1\frac{dz}{dt} + c_1 z$$



Trochę matematyki…

- *W najbardziej ogólnym przypadku sygnał wyjściowy* ***y(t)*** *może być równaniem różniczkowym wyższego rzędu sygnału wejściowego* ***u(t)***

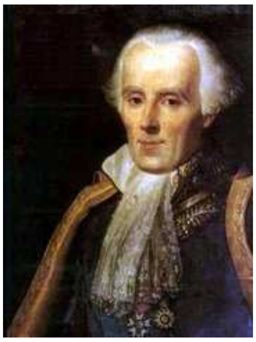
$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

gdzie $\mathbf{a_i}$ *dla i=0..n,*
$\mathbf{b_i}$, *dla i=0..m*
są stałymi współczynnikami równania

Trochę matematyki…

Jak sobie ułatwić życie…

Pierre-Simon markiz de Laplace
23 III 1749 – 5 III 1827



- *Laplace wymyślił narzędzie matematyczne zwane **transformatą Laplace'a x(t) → X(s)***
- *Jego zaletą jest możliwość rozwiązania równania różniczkowego po przekształceniu go w równanie algebraiczne*
- *Należy przejść na płaszczyznę Gaussa F(s), przekształcić równanie i otrzymać rozwiązanie w dziedzinie czasu posługując się odwrotną transformatą Laplace'a*

Przekształcenie Laplace'a

*Przekształcenie przeprowadzające pewną funkcję **f(t)** (tzw. **oryginał**), w funkcję zmiennej zespolonej **f(s)** (tzw. **obraz**), przy czym*

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

*gdzie: **s∈C**; C – zbiór liczb zespolonych,*
s – liczba zespolona,
t – czas.

Tw. o liniowości transformaty Lapleace'a

$$L[A\cdot f(t) + B\cdot f(p)] = A\cdot Lf(t) + B\cdot Lf(p)$$

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} A_i f(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} A_i L[f(t)]$$

Przekształcenie Laplace'a

Tablice transformat:

lp.	Oryginał	Transformata
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$	1
3	αt	$\frac{\alpha}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{s\mp\alpha}$
6	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
7	$\cos\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
8	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

Przekształcenie Laplace'a

Transormata:

$$e^{\pm\alpha t} \rightarrow \frac{1}{s\mp\alpha}$$

Wyprowadzenie:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s-\alpha}\left[e^{-(s-\alpha)t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s-\alpha}$$

Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a stosuje się do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych dowolnego rzędu, które sprowadza się do równania algebraicznego.

$$L[f'(t)] = sf(s) - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$$

Przekształcenie Laplace'a

Przykład: $\frac{dy}{dt} - 3y = 1$

$$L\left(\frac{dy}{dt} - 3y\right) = L(1)$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) - 3L(y) = L(1)$$

$$L(y') - 3L(y) = L(1)$$

$L(y') = sy(s) - y(0)$ $\quad$ $3L(y) = 3y(s)$ $\quad$ $L(a) = \frac{a}{s}$ czyli $L(1) = \frac{1}{s}$

dla $y(0) = 0$ $\quad$ $L(y') = sy(s)$

$$sy(s) - 3y(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s)\cdot(s-3) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y(s) = \frac{1}{s(s-3)} = \frac{1}{s^2 - 3s}$$

Przekształcenie Laplace'a

dla $y(s) = \frac{1}{s(s-3)}$

z tablic $F(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)}$ $\rightarrow$ tutaj $\alpha = -3$

oryginał z tablic $y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$

ostatecznie $y(t) = -\frac{1}{3}(1 - e^{3t}) = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$

lp.	Oryginał	Transformata
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$	1
3	αt	$\frac{\alpha}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$
6	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
7	$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
8	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$

Transmitancja układu

Zwykle relacja pomiędzy sygnałem wyjściowym y(t) i wejściowym u(t) systemu jest opisywana za pomocą równań różniczkowych:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

lub z wykorzystaniem operatora Laplace'a:

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \; = \; b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0$$

Transmitancja układu

Funkcję przetwarzającą sygnał wejściowy na wyjściowy (transmitancja obiektu) można określić jako:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Def. *Transmitancja operatorowa G(s) (funkcja przejścia, przepustowość) to stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych równania różniczkowego*

Jeżeli jest znana transmitancja operatorowa obiektu G(s) oraz sygnał sterujący U(s), to można wyznaczyć sygnał wyjściowy z obiektu

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Transmitancja układu

$$T\frac{dy}{dt} + y = u$$

$$Tsy(s) + y(s) = u(s)$$

$$y(s) \cdot (Ts + 1) = u(s)$$

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

$$L[f'(t)] = sf(s) - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 2u$$

$$s^2 y(s) + 2sy(s) + 2y(s) = su(s) + 2u(s)$$

$$y(s) \cdot (s^2 + 2s + 2) = u(s) \cdot (s + 2)$$

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$$

Transmitancja układu

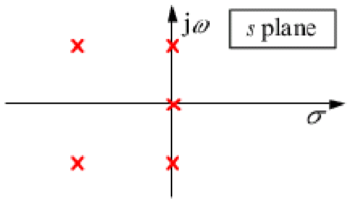
$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

Przyrównując mianownik do zera otrzymujemy tzw. równanie charakterystyczne

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

którego rozwiązaniem jest n pierwiastków zespolonych $s_{1,2 \ldots n}$,
gdzie $\boldsymbol{s_i = \sigma + j\omega}$

Rozwiązania równania charakterystycznego $s_i = \sigma + j\omega$ przedstawia się w płaszczyźnie współrzędnych zespolonych



Narzędzia dla inżyniera…

- *Dla złożonych układów regulacji obliczenia mogą być skomplikowane nawet przy użyciu transformaty Laplace'a.*
- *Nawet jeżeli uzyskano rozwiązanie analityczne mogą wystąpić problemy w jego interpretacji.*

- *Równanie różniczkowe*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

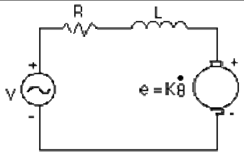
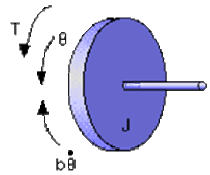
- *Rozwiązanie równania:*

$$y(t) = e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}(t) + \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

  - *Biegun rzeczywisty **s = α** jest związany poprzez odwrotną transformatę Laplace'a z funkcja czasu **$e^{-\alpha t}$**.*
  - *Biegun zespolony **s=α+βi** z funkcjami **$e^{-\alpha t}$sin(ωt) oraz $e^{-\alpha t}$cos(ωt) → oscylacje !!!.***

Narzędzia dla inżyniera…

Model fizyczny silnika prądu stałego i równania układu

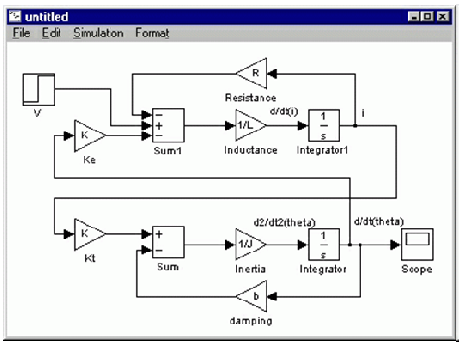
Model układu elektrycznego	Model układu mechanicznego
	
$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\frac{d\theta}{dt}$	$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = Ki$

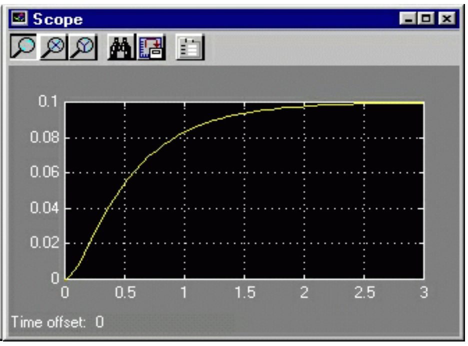
J- moment bezwładności wirnika; b- współczynnik tłumienia układu mechanicznego; K- stała silnika; R- opór elektryczny; L- indukcyjność; V- napięcie źródła (wejście) θ- kat obrotu wałka silnika (wyjście); założono, że stojan i wirnik są ciałami sztywnymi

transmitancja układu:
$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2}$$

Narzędzia dla inżyniera…

Model numeryczny układu (SIMULINK) i odpowiedź (zmiana prędkości obrotowej wału silnika) na wymuszenie skokowe.





Narzędzia dla inżyniera…