Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

MECHATRONIKA
STABILNOŚĆ SYSTEMÓW MECHATRONICZNYCH
PRZYKŁADY

dr inż. Roland PAWLICZEK

Kryterium Hurwitz`a

Transmitancja układu

$$G(s)=\frac{L(s)}{M(s)}$$

Przyrównując mianownik do zera otrzymujemy tzw. równanie charakterystyczne

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

którego rozwiązaniem jest n pierwiastków $s_{1,2\ \ldots\ n}$. Dla równania zapiszemy tzw. Macierz Hurwitz`a:

$$H := \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \ldots & \ldots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

Kryterium Hurwitz`a

Warunki stabilności układu

Stabilność asymptotyczna: *wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny transmitancji) musza znajdować się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, czyli wszystkie pierwiastki rzeczywiste oraz wszystkie części rzeczywiste pierwiastków zespolonych powinny być ujemne.*

Aby spełnić ten warunek:

1. *Współczynniki a_i równania charakterystycznego dla i=0...n muszą być tego samego znaku.*
2. *Wyznaczniki macierzy Hurwitz`a muszą być większe od zera* $\mathbf{A_i > 0}$.

3

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 1

Sprawdzić stabilność układu, dla którego równanie charakterystyczne ma postać:

$$P(s) = 8s^3 + 10s^2 + 2s + 1$$

współczynniki $a_3=8$, $a_2=10$, $a_1=2$, $a_0=1$ są tego samego znaku.

*Warunek **1.** jest spełniony.*

4

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 1

Macierz Hurwitz`a ma postać:

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zaś wyznaczniki:

$$A_1(H) = a_2 = 10 > 0$$

$$A_2(H) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 1 \cdot 8 = 12 > 0$$

$$A_3(H) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 10 & 8 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad = 10 \cdot 2 \cdot 1 + 0 + 0 - 8 \cdot 1 - 0 - 0 = 12 > 0$$

*Warunkek **2.** jest spełniony*

układ jest asymptotycznie stabilny

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 1

SPRAWDZENIE:

Dla równania charakterystycznego:

P(s) = 8s³ + 10s² + 2s + 1

$$P(s) = 8s^3 + 10s^2 + 2s + 1$$

pierwiastki równania charakterystycznego są:

roots([8 10 2 1]):

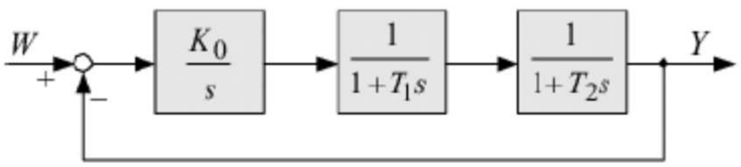
s_1 = - 1,13
s_2 = - 0,06 - 0,33i
s_3 = - 0,06 + 0,33i

Części rzeczywiste pierwiastków są mniejsze od zera.

układ jest asymptotycznie stabilny

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Rysunek przedstawia układ regulacji z pętlą sprzężenia zwrotnego. Określić wartość współczynnika K_0 tak, aby układ był asymptotycznie stabilny. Stałe czasowe T_1 i T_2 są znane.



Układ składa się z regulatora typu I (całkujący) oraz dwóch obiektów typu proporcjonalnego PT_1 z inercją pierwszego rzędu.

7

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Dla otwartej pętli sprzężenia zwrotnego transmitancja jest:

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s} \cdot \frac{1}{1+T_1 s} \cdot \frac{1}{1+T_2 s} = \frac{K_0}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$= \frac{K_0}{s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3}$$

Dla zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego transmitancja jest:

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K_0}{K_0 + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3}$$

8

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$P(s) = K_0 + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3 \quad = 0$$

czyli: $a_0 = K_0$

$a_1 = 1$

$a_2 = T_1 + T_2$

$a_3 = T_1T_2$

9

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Aby układ ze sprzężeniem zwrotnym był stabilny asymptotycznie musi być zachowany warunek:

$a_0 = K_0 \quad > 0$

$a_1 = 1 \quad > 0$

$a_2 = T_1 + T_2 \quad > 0$

$a_3 = T_1T_2 \quad > 0$

Warunki te są spełnione z założenia, gdyż wzmocnienie regulatora całkującego K_0 oraz stałe czasowe T_1 i T_2 obiektów nie mogą być mniejsze od zera.

10

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Musi być również spełniony warunek wynikający z analizy macierzy Hurwitz`a

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 + T_2 & T_1 T_2 & 0 \\ K_0 & 1 & T_1 + T_2 \\ 0 & 0 & K_0 \end{pmatrix}$$

w postaci:

$$A_2(H) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & T_1 T_2 \\ K_0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{T_1 + T_2 - K_0 T_1 T_2 > 0}$$

11

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Z warunku $\boldsymbol{T_1 + T_2 - K_0 T_1 T_2 > 0}$ *wynika że:*

$$\boxed{K_0 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}}$$

Układ regulacji ze sprzężeniem zwrotnym ***jest stabilny asymptotycznie*** *gdy:*

$$0 < K_0 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

12

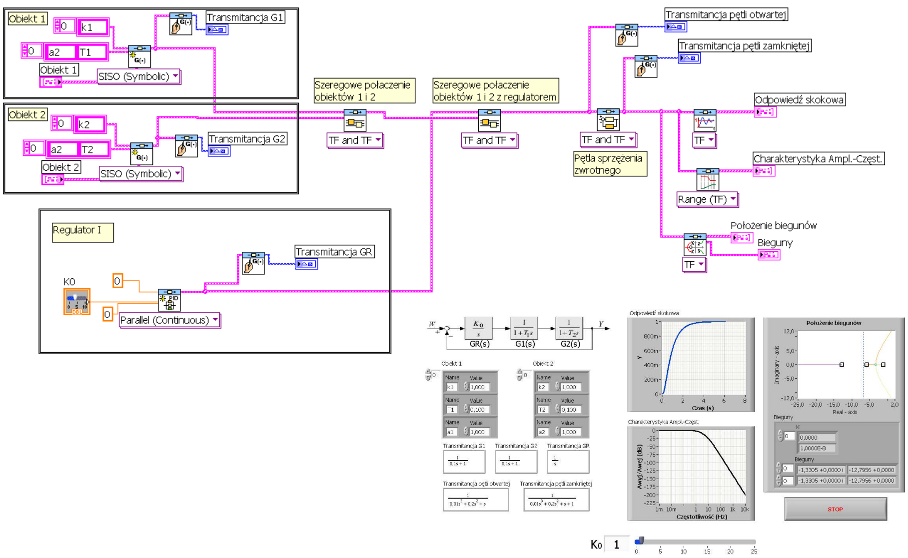
Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2

Symulacja pracy układu:

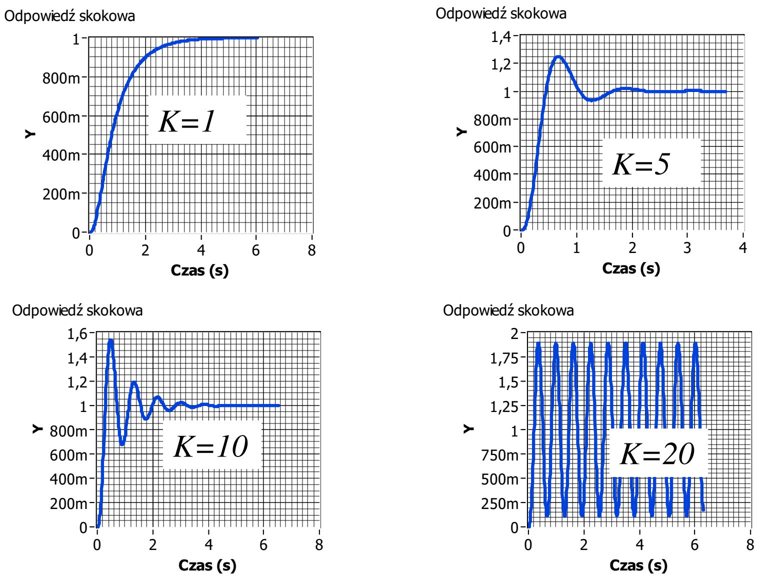
dla $T_1 = 0{,}1$ *i* $T_2 = 0{,}1$ *wynika, że współczynnik wzmocnienia* K_0 *dla stanu stabilności krytycznej wynosi*

$$K_0 < \frac{0{,}1+0{,}1}{0{,}1\cdot 0{,}1} = \frac{0{,}2}{0.01} = 20$$

Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2



Kryterium Hurwitz`a – PRZYKŁAD 2



15

Kryterium Hurwitz'a – PRZYKŁAD 3

Zbadać stabilność układu zamkniętego regulacji, jeżeli transmitancja układu otwartego ma postać

$$G(s) = \frac{1}{s(0{,}1s+1)(0{,}2s+1)}$$

Rozwiązanie

Wyznaczymy równanie charakterystyczne układu zamkniętego, który jest opisany poniższą transmitancją

$$G_z(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{s(0{,}1s+1)(0{,}2s+1)+1}$$

Równanie charakterystyczne

$$s(0{,}1s+1)(0{,}2s+1)+1 = 0{,}02s^3+0{,}3s^2+s+1 = 0$$

ma współczynniki: $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0{,}3,\ a_3 = 0{,}02$.
Są one dodatnie. Pierwsze kryterium jest spełnione.
Wyznacznik główny

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0\Delta_2$$

będzie dodatni, gdy podwyznacznik o stopień niższy $\Delta_{n-1} = \Delta_2$ będzie większy od zera.
Czyli

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}02 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}3 - 0{,}02 = 0{,}28 > 0$$

16

Kryterium Hurwitz'a – PRZYKŁAD 4

Dany jest układ regulacji jak na rys. 1, który składa się z połączenia kaskadowego obiektu opisanego transmitancją $G_o(s) = G(s)$ z zadania 1.2 oraz korektora proporcjonalnego $G_k(s) = K$.
Wyznaczyć dopuszczalne wartości wzmocnienia K zapewniającego stabilność asymptotyczną układu regulacji.

Rozwiązanie

Transmitancja układu otwartego ma postać

$$G(s) = G_k(s)G_o(s) = \frac{K}{s(0{,}1s + 1)(0{,}2s + 1)}$$

Układ zamknięty opisuje transmitancja

$$G_z(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s(0{,}1s + 1)(0{,}2s + 1) + K}$$

Równanie charakterystyczne

$$s(0{,}1s + 1)(0{,}2s + 1) + 1 = 0{,}02s^3 + 0{,}3s^2 + s + K = 0$$

ma współczynniki $a_0 = K,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0{,}3,\ a_3 = 0{,}02$

Aby pierwszy warunek Hurwitza był spełniony, musi być $K > 0$. Podobnie jak w zadaniu 1.2 wystarczy zbadać podwyznacznik Δ_2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}02 \\ K & 1 \end{vmatrix} = 0{,}3 - 0{,}02K$$

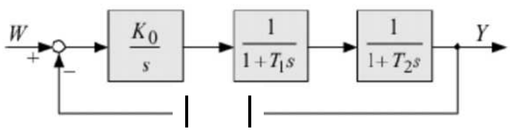
Aby układ był asymptotycznie stabilny, musi być $\Delta_2 > 0$.
Stąd wartość wzmocnienia musi być $K < 15$
Zatem warunek asymptotycznej stabilności układu zamkniętego będzie zapewniony dla wzmocnienia zmieniającego się w granicach

$$0 < K < 15$$

17

Kryterium Nyquista – PRZYKŁAD 2

Wykorzystując kryterium Nyquista dla poprzedniego przykładu:



Określamy transmitancję układu otwartego:

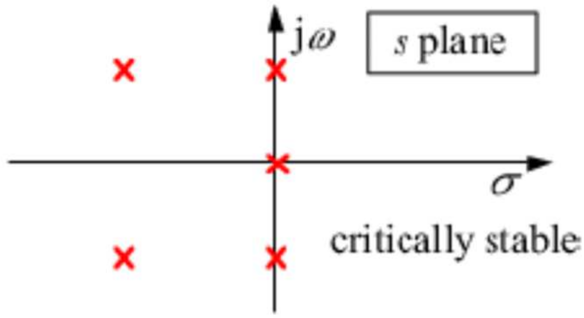
$$G_0(s) = \frac{K_0}{s} \cdot \frac{1}{1+T_1 s} \cdot \frac{1}{1+T_2 s} = \frac{K_0}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$= \frac{K_0}{s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3}$$

18

Kryterium Nyquista – PRZYKŁAD 2

Dla warunku stabilności krytycznej, gdy rozwiązania równania charakterystycznego $\boldsymbol{s_i = \sigma + j\omega}$ *leżą na osi* **Im (jω)** *w płaszczyźnie współrzędnych zespolonych* **(Re → σ = 0)**



19

Kryterium Nyquista – PRZYKŁAD 2

wstawiamy $\boldsymbol{s = j\omega}$*:*

$$G_0(j\omega) = \frac{K_0}{j\omega + (T_1+T_2)(j\omega)^2 + T_1T_2(j\omega)^3} = \frac{K_0}{j\omega + (T_1+T_2)j^2\omega^2 + T_1T_2 j^3\omega^3}$$

Pamiętając, że $j = \sqrt{-1}$ *po przekształceniach:*

$$G_0(j\omega) = \frac{K_0}{j\omega - (T_1+T_2)\omega^2 - (T_1T_2)j\omega^3} = \frac{K_0}{-(T_1+T_2)\omega^2 + j(\omega - T_1T_2\omega^3)}$$

Oznaczając $A = -(T_1+T_2)\omega^2$ $B = (\omega - T_1T_2\omega^3)$ *mamy:*

$$G_0(j\omega) = \frac{K_0}{A+jB} = \frac{K_0(A-jB)}{(A+jB)(A-jB)} = \frac{K_0A - jK_0B}{A^2+B^2} = \frac{K_0A}{A^2+B^2} - j\frac{K_0B}{A^2+B^2}$$

20

Kryterium Nyquista – PRZYKŁAD 2

otrzymujemy ostatecznie:

$$G_0(j\omega)=\frac{K_0 A}{A^2+B^2}-j\frac{K_0 B}{A^2+B^2} \qquad \rightarrow \qquad G_0(j\omega)=Re-j\,Im$$

Dla kryterium Nyquista układ jest stabilny, gdy punkt

s = -1+j0

nie jest objęty charakterystyką amplitudowo-fazową.

Musi być spełniony warunek dla

***Im** $G_0(j\omega)=0$ → **Re** $G_0(j\omega) > -1$*

czyli:

$$j\frac{K_0 B}{A^2+B^2}=0 \Leftrightarrow \qquad B=0$$

21

Kryterium Nyquista – PRZYKŁAD 2

wyznaczamy:

$$B=\omega-T_1T_2\omega^3=\omega(1-T_1T_2\omega^2)=0$$

$$\omega_1=0 \quad \omega_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

*dla warunku **Re** $G_0(j\omega) > -1$ możemy zapisać:*

$$\mathrm{Re}\,G_0(j\omega)=\frac{K_0 A}{A^2+B^2}>-1$$

$$dla \qquad B=0 \quad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\,G_0(j\omega)=\frac{K_0}{A}=\frac{K_0}{-(T_1+T_2)\omega^2}>-1$$

22

Kryterium Nyquista – PRZYKŁAD 2

wstawiając otrzymane $\omega_{2,3}$:

$$\frac{K_0}{-(T_1+T_2)\frac{1}{T_1T_2}} > -1$$

$$-\frac{K_0}{\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}} > -1 \quad /\cdot\left(-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\boxed{K_0 < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}}$$

23