POLITECHNIKA OPOLSKA
Opole University of Technology

KATEDRA MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
Department of Mechanics and Machine Design

Symulacja systemów mechatronicznych

Instrukcja do ćwiczeń laboratoryjnych

Modelowanie z zastosowaniem transmitancji operatorowej w module LabVIEW Control Design and Simulation

Opracował: Dr hab. inż. Roland Pawliczek

Opole 2022

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z interfejsem użytkownika środowiska LabVIEW i modułu Control Design and Simulation oraz jego wykorzystaniem jako narzędzia do modelowania i symulacji układów dynamicznych z wykorzystaniem transmitancji operatorowej.

Zakres ćwiczenia obejmuje wyznaczenie funkcji transmitancji, zbudowanie modelu numerycznego oraz wyznaczenie odpowiedzi układu na zadane wymuszenia.

2. Przekształcenie Laplace'a

Modelowanie układów dynamicznych z zastosowaniem funkcji transmitancji wykorzystuje przekształcenie Laplace'a w odniesieniu do modelu matematycznego obiektu w postaci równać różniczkowych. W najbardziej ogólnym przypadku, układ dynamiczny może być opisany liniowym równaniem różniczkowym wiążącym odpowiedź układu y(t) z wymuszeniem u(t) w postaci:

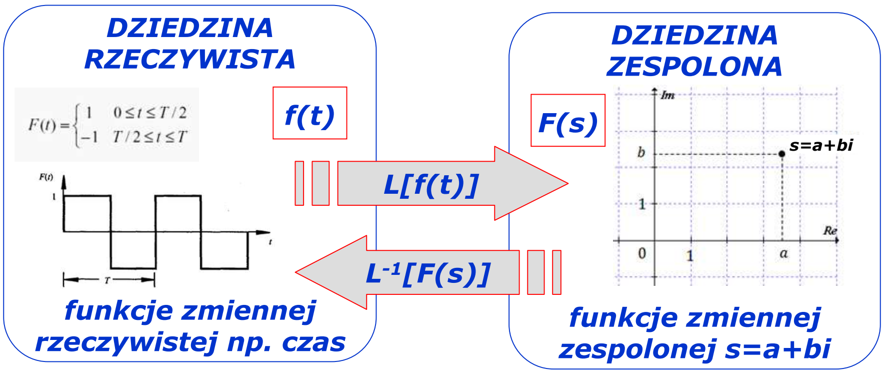
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

gdzie: a_i dla i=0..n oraz b_i, dla i=0..m są stałymi współczynnikami równania.

Przekształcenie Laplace'a jest transformacją przeprowadzającą pewną funkcję f(t) (tzw. oryginał), w funkcję zmiennej zespolonej F(s) (tzw. obraz).

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

gdzie: $s \in C$; C – zbiór liczb zespolonych, s – liczba zespolona, t – czas.



Należy przejść na płaszczyznę Gaussa F(s), przekształcić równanie i otrzymać rozwiązanie. Ponieważ przekształcenie Laplace'a jest przekształceniem odwrotnym można na podstawie obrazu funkcji uzyskać rozwiązanie w dziedzinie czasu posługując się odwrotną transformatą Laplace'a. Zaletą stosowania przekształcenia jest możliwość rozwiązania równania różniczkowego w dziedzinie czasu poprzez przekształcenie go w równanie algebraiczne w dziedzinie zmiennej operatorowej s.

Podstawowe zależności wykorzystywane przy przekształcaniu prostych zagadnień inżynierskich wykorzystują twierdzenie o liniowości transformaty

$$L[A \cdot f(t) + B \cdot f(p)] = A \cdot Lf(t) + B \cdot Lf(p)$$

które pozwala na rozpatrywanie transformaty Laplace'a funkcji złożonych jako sumę transformat poszczególnych funkcji, przy czym uwzględnia się fakt, że stałe nie wpływają na postać transformaty i mogą być wyłączone przed znak transformaty. Przydatne jest również twierdzenie pozwalające wyznaczyć transformatę pochodnej rzędu I i II funkcji w postaci

$$L[f'(t)] = sf(s) - f(0)$$
$$L[f''(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$$

gdzie f(0) oraz f'(0) są warunkami brzegowymi, wartościami funkcji i pochodnej dla t=0. W przypadku, gdy przekształcenie jest wykorzystywane do określenia funkcji transmitancji warunki brzegowe muszą spełniać warunki f(0)=0 oraz f'(0)=0.

Przykład:

$$\frac{dy}{dt} - 3y = 1$$
$$L\left(\frac{dy}{dt} - 3y\right) = L(1)$$
$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) - 3L(y) = L(1)$$
$$L(y') - 3L(y) = L(1)$$

$$L(y') = sy(s) - y(0)$$
$$\text{dla } y(0) = 0 \qquad L(y') = sy(s)$$

$$L(a) = \frac{a}{s} \quad \text{czyli} \quad L(1) = \frac{1}{s}$$

$$3L(y) = 3y(s)$$

$$sy(s) - 3y(s) = \frac{1}{s}$$
$$y(s) \cdot (s-3) = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad y(s) = \frac{1}{s(s-3)} = \frac{1}{s^2 - 3s}$$

Funkcja y(s) jest rozwiązaniem wyjściowego równania różniczkowego.

3. Model transmitancyjny

Jeżeli równanie różniczkowe poddane zostanie przekształceniu z wykorzystaniem transformaty Laplace'a to w najbardziej ogólnym przypadku uzyskuje się

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

L[y(t), u(t)]

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \; = \; b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0$$

Funkcję przetwarzającą sygnał wejściowy na wyjściowy (**transmitancja obiektu**) można określić jako:

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

Def. Transmitancja operatorowa G(s) (funkcja przejścia, przepustowość) to stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych równania różniczkowego

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

Dysponując transmitancją operatorową G(s) można wyznaczyć odpowiedź układu Y(s) dla zadanego wymuszenia U(s).

Przykład:
Wyznaczenie odpowiedzi układu dynamicznego na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego u(t)=1.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+2u \qquad / L[]$$

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=sU(s)+2U(s)$$

$$Y(s)\cdot(s^2+2s+2)=U(s)\cdot(s+2) \qquad /\frac{1}{U(s)(s^2+2s+2)}$$

$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2}{s^2+2s+2}} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=U(s)\frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

dla $\quad u(t)=1 \rightarrow U(s)=\frac{1}{s} \rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{s+2}{s^3+2s^2+2s}$

Przykład:
Transmitancja obiektu rzędu pierwszego (PT1)

$$T\frac{dy}{dt}+y=u$$

$$TsY(s)+Y(s)=U(s)$$

$$Y(s)\cdot(Ts+1)=U(s)$$

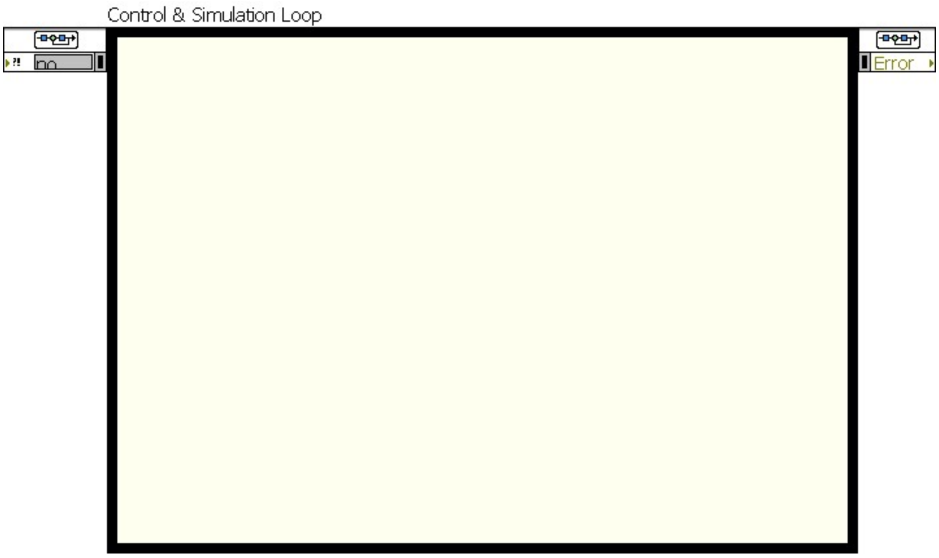
$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ts+1}}$$

<u>UWAGA: Funkcja transmitancji G(s) ma postać ułamka, w którym powszechnie przyjęto oznaczenia:</u>

$$G(s)=\frac{L(s)}{M(s)}=\frac{[\text{Numerator}]}{[\text{Denominator}]} \qquad \text{np.} \quad \frac{[1]}{[1\ \ T]};\quad \frac{[2\ \ 1]}{[0\ \ 2\ \ 2\ \ 1]}$$

4. Elementy modułu symulacyjnego pakietu LabVIEW.

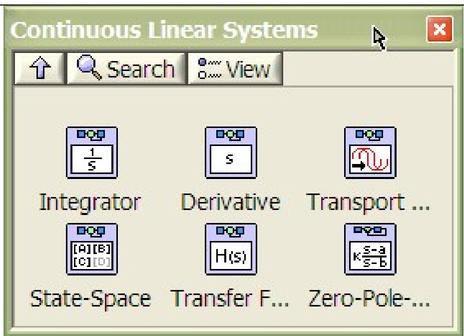
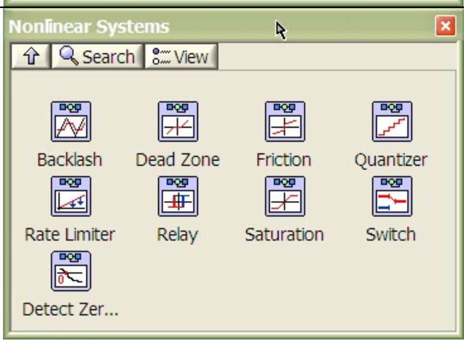
Modelowanie obiektu za pomocą funkcji transmitancji w systemie LabVIEW odbywa się w module Simulation z wykorzystaniem pętli symulacyjnej *Control & Simulation Loop* (Rys. 1). Po wybraniu opcji należy zaznaczyć dwa narożniki określające obszar objęty pętlą symulacyjną (Rys. 2).

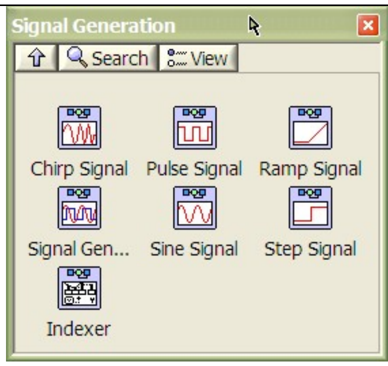
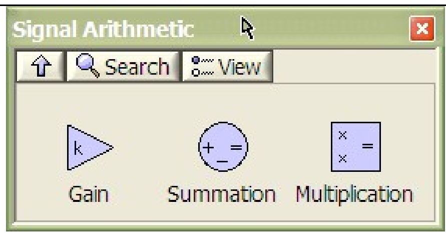
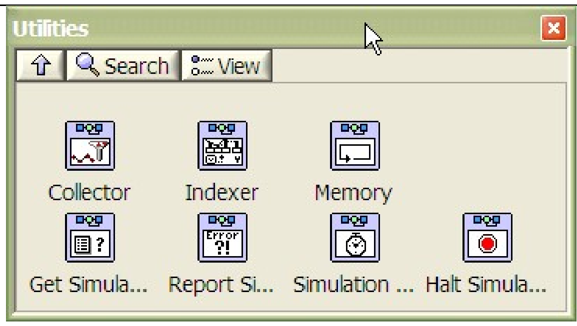
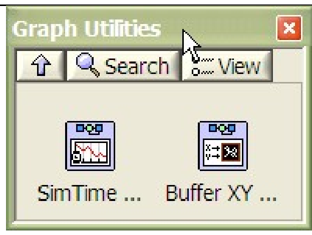


Rys. 2. Pętla symulacyjna

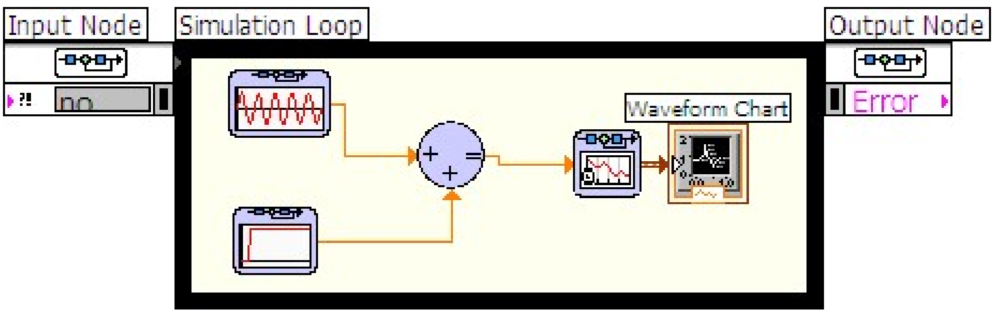
Uwaga: Wszystkie elementy dotyczące symulacji muszą się znajdować wewnątrz pętli. Niektóre funkcje z innych palet nie mogą być używane w pętli symulacyjnej.

Tabela 1. Palety funkcji modułu *Simulation*

Reprezentacja układów liniowych opisanych za pomocą równań różniczkowych: funkcje całkowania, różniczkowania, opisu za pomocą modelu transmitancyjnego lub wektora stanów.	
Możliwość wprowadzenia nieliniowości do systemu.	

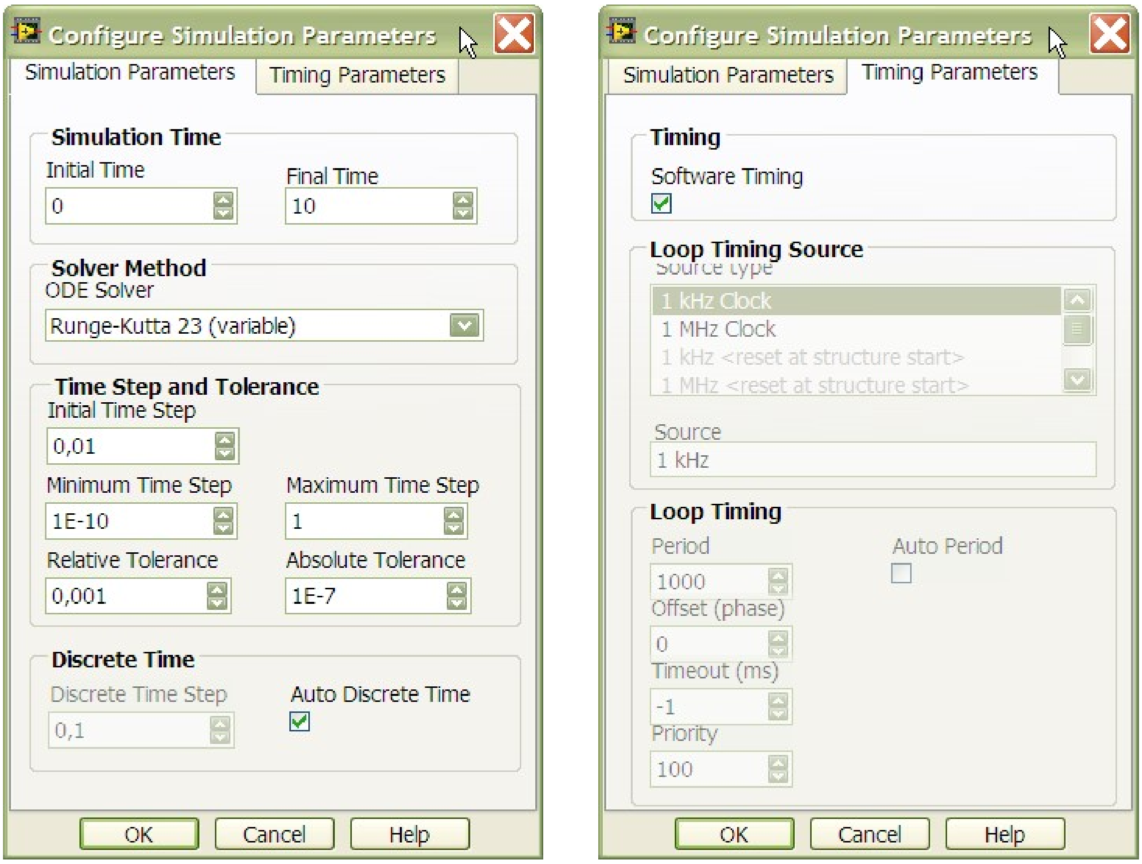
Generator typowych sygnałów wejściowych, takich jak: skok jednostkowy, wymuszenie sinusoidalne, prostokątne itp.	
Operacje matematyczne na sygnałach: wzmocnienie, węzły sumacyjne.	
Funkcje umożliwiające gromadzenie danych z symulacji, indeksowanie względem czasu symulacji, przechowywanie danych w pamięci i przekazywanie do kolejnej pętli symulacji, zatrzymywanie symulacji.	
Wyświetlanie wyników symulacji za pomocą wykresów.	

Pętla symulacyjna posiada węzły wejściowy oraz wyjściowy, przy czym węzeł wyjściowy zawiera informację o kodzie błędu, który się ewentualnie pojawia przy obliczeniach.



Rys. 3. Węzły wejściowy (Input) i wyjściowy (Output)

Konfiguracja węzła wejściowego może odbywać się za pomocą okna dialogowego, do którego dostęp uzyskuje się, poprzez dwukrotne kliknięcie klawiszem myszki w chwili, gdy kursor jest ustawiony na węźle.



Rys. 4. Okno konfiguracji węzła wejściowego

Zakładka *Simulation Parameters* pozwala zdefiniować:

Initial Time – chwila początkowa, zwykle 0,

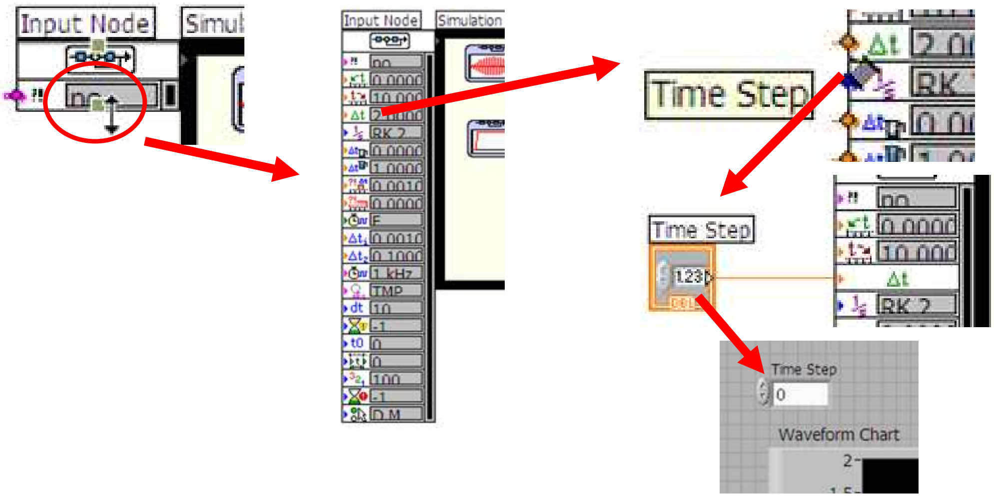
Final Time – czas zakończenia symulacji, możliwe jest wprowadzenie parametru *Inf*. W tym przypadku pętla będzie wykonywana do momentu jej zatrzymania przez użytkownika, np. za pomocą funkcji HALT.

Solver Method – określa procedurę numeryczną, którą system będzie używać przy wykonywaniu obliczeń, może to być np. metoda Eulera (stały krok czasowy), Rungego-Kutty (zmienny krok czasowy) i inne.

Initial Time Step – jest rozdzielczością (krokiem) czasu dla wykonywanych obliczeń. Im mniejszy krok czasowy. tym większa dokładność, ale i czas obliczeń rośnie. Można przyjąć pewien krok czasowy i zmniejszać go obserwując zmiany wyników obliczeń. W pewnym momencie zmniejszanie kroku nie poprawia już wyników obliczeń. Można przyjąć wartość tego czasu jako T_i=0,1T, gdzie T jest najmniejszą stałą czasową dla obiektu z symulowanego układu. W najbardziej ogólnym przypadku przyjęcie wartości T_i=0.05 pozwala uzyskać stosunkowo gładkie przebiegi analizowanych zagadnień.

Możliwe jest także zdefiniowanie zakresu kroku czasowego dla obliczeń ze zmiennym krokiem oraz określenie tolerancji przy poszukiwaniu rozwiązania. Parametr *Discrete Time* określa krok czasowy dla obliczeń wykonywanych dla obiektów opisywanych modelami dyskretnymi. Zakładka *Timing Patrameters* pozwala zsynchronizować symulację z zewnętrznymi układami taktującymi lub zaobserwować rzeczywisty czas pracy symulowanego układu. Domyślnie symulacja jest wykonywana „najszybciej jak się da”.

Parametry z okna konfiguracyjne mogą być także zmieniane programowo z *Panelu Czołowego*. Należy wówczas przygotować odpowiednie kontrolki i połączyć je z terminalami węzła wejściowego (Rys. 5).



Rys. 5. Obsługa węzła wejściowego z Panelu Czołowego

Powyższy opis zawiera podstawowe informacje nt. pętli symulacyjnej. Szczegółowe informacje dostępne są w systemie pomocy LabVIEW.

5. Model numeryczny z wykorzystaniem funkcji transmitancji.

Należy wyznaczyć odpowiedź na skok jednostkowy obiektu typu PT1 o stałej czasowej T. Określić wpływ stałej czasowej na odpowiedź układu.

$$T\frac{dy}{dt}+3y=2u \qquad \text{gdzie } y=y(t) \text{ oraz } u=u(t).$$

$$TsY(s)+3Y(s)=2U(s)$$

$$Y(s)\cdot(Ts+3)=2U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2}{Ts+3}$$

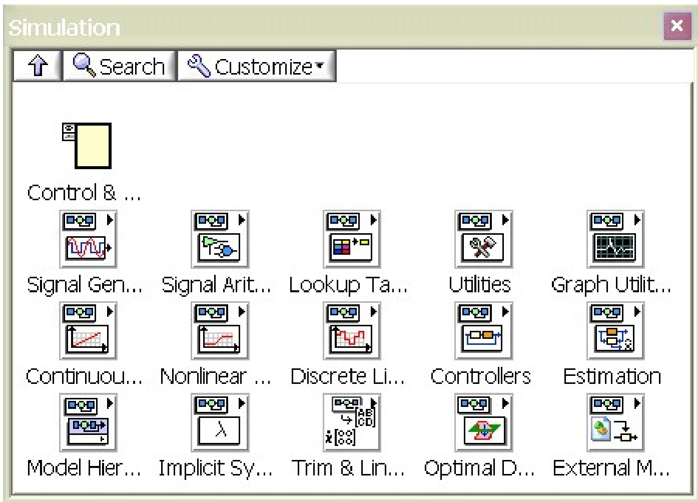
Symulację wykonać dla wymuszenia u(t)=1 (skok jednostkowy) dla T_1=0,25; T_2=0,5; T_3=0,8; , w związku z czym należy zbadać odpowiedź dla układów opisanych transmitancjami:

$$G_1(s)=\frac{2}{0{,}25s+3}$$

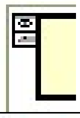
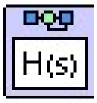
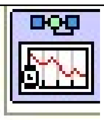
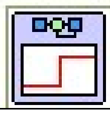
$$G_2(s)=\frac{2}{0{,}5s+3}$$

$$G_3(s)=\frac{2}{0{,}8s+3}$$

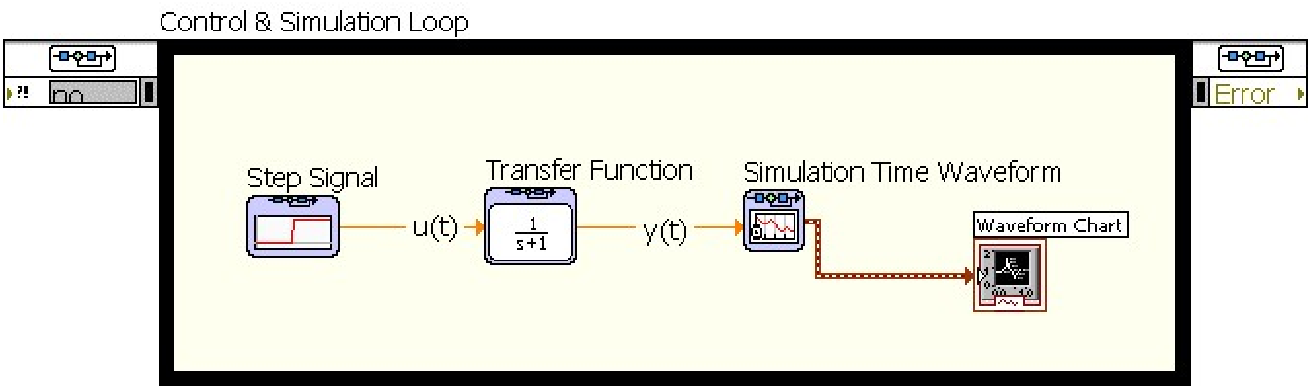
Do budowy modelu numerycznego należy wykorzystać następujące funkcje z palety *Function/ControlDesign&Simulation/Simulation* (Rys.6).



Rys. 6. Paleta funkcji *Simulation*

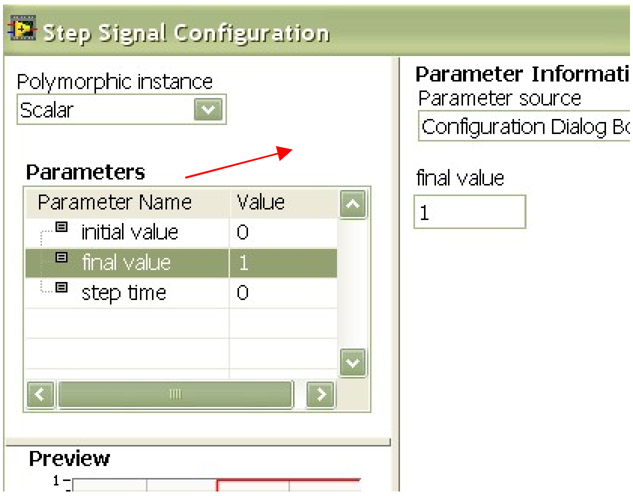
	Pętla symulacyjna
	Funkcja *Transfer Function* z palety Continous Linear Systems
	Funkcja *Simulation Time Waveform* z palety Graph Utilities
	Funkcja *Step Signal* z palety Signal Generation

Elementy należy umieścić wewnątrz pętli symulacyjnej i połączyć odpowiednie wyjścia i wejścia (Rys.7).



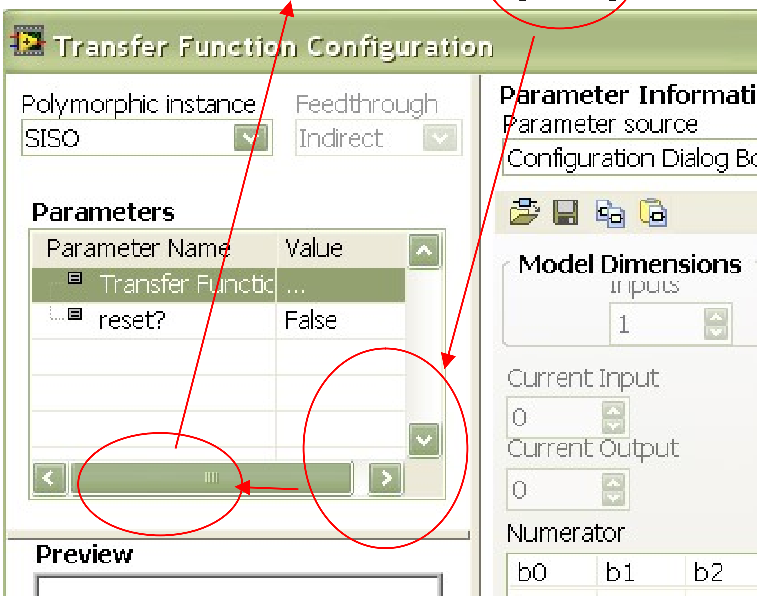
Rys. 7. Diagram programu

Następnie należy skonfigurować poszczególne funkcje:

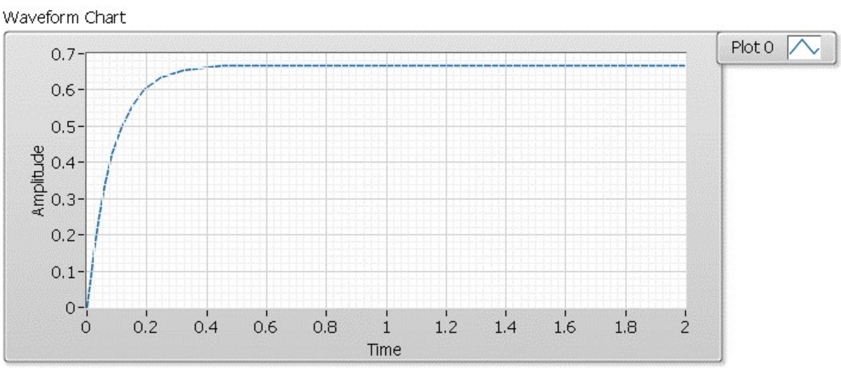


Aby wprowadzić funkcję transmitancji należy zdefiniować współczynniki określające numerator i denominator funkcji transmitancji:

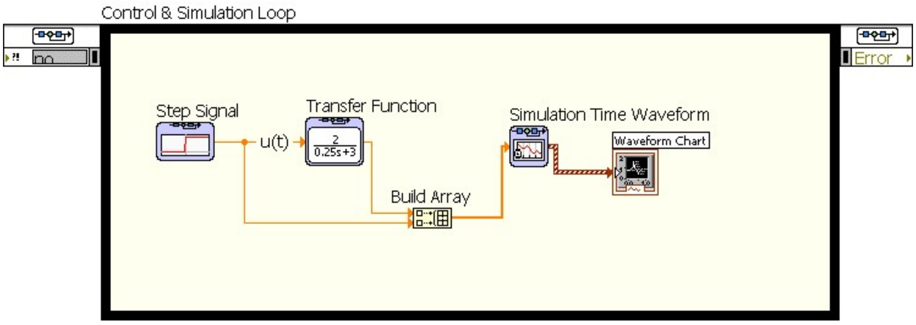
$$G_1(s) = \frac{2}{0{,}25s + 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{[2]}{[3\ \ 0.25]}$$

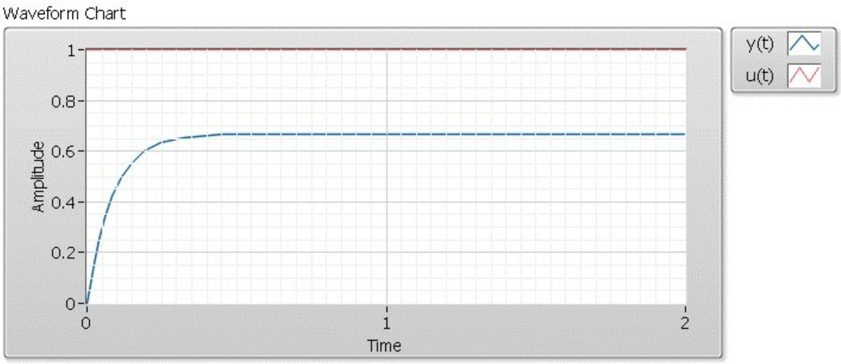


Po zatwierdzeniu zmian można uruchomić symulację, co będzie skutkowało wyświetleniem wykresu przedstawiającego odpowiedź skokową.

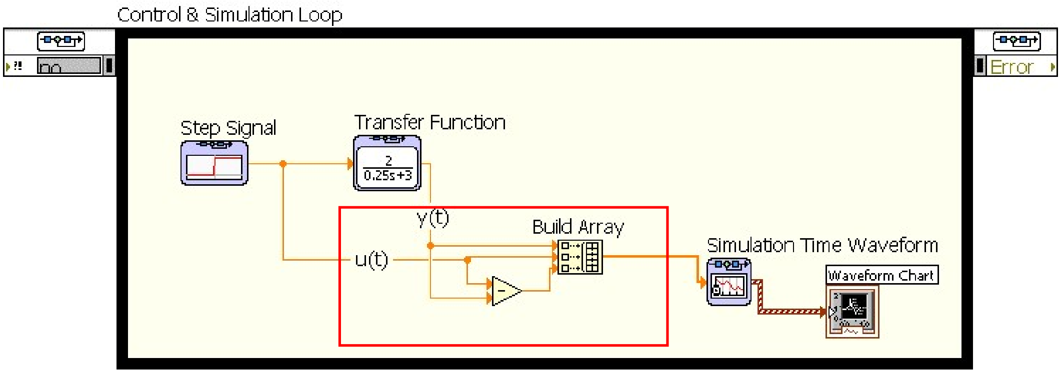


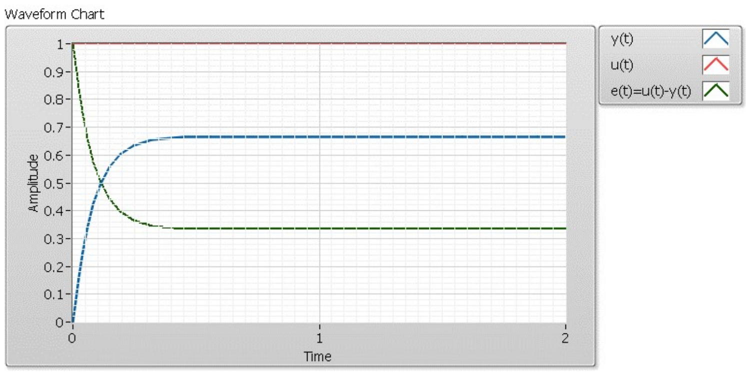
Uzupełnienie modelu numerycznego funkcją *Build Array* z palety Array pozwoli zbudować tablicę, która umożliwi porównanie odpowiedzi skokowej z wymuszeniem układu.



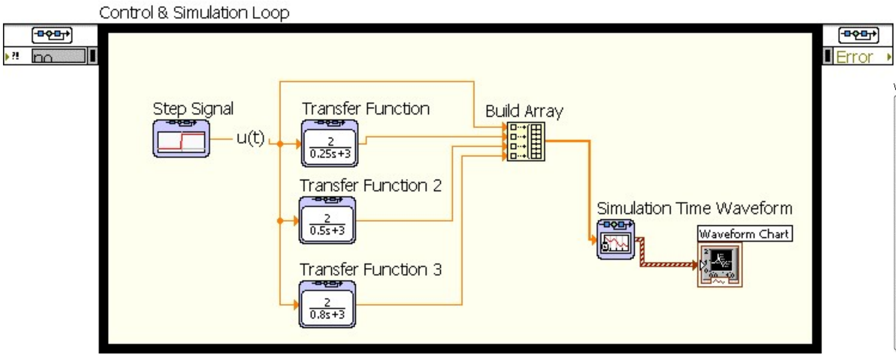


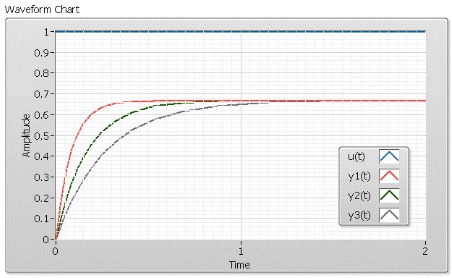
Sygnały uzyskane w procesie symulacji mogą być przetwarzane i wykorzystywane do analizy innych parametrów zależnych, np. uchyb, definiowany jako różnica pomiędzy sygnałem zadanym i wyjściowym może być wyznaczony za pomocą prostego kodu uzupełniającego diagram programu:





Możliwe jest również przeprowadzenie symulacji dla większej liczby obiektów:





6. ZADANIE

Opracować z zastosowaniem **funkcji transmitancji** model komputerowy układu opisanego równaniem

$$2a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 6y = k\frac{du}{dt}, \quad \text{gdzie y=y(t) oraz u=u(t).}$$

$$2a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 6y = k\frac{du}{dt}$$

$$L\left(2a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + 6y\right) = L\left(k\frac{du}{dt}\right)$$

$$2 \cdot a \cdot s^2 \cdot y(s) + b \cdot s \cdot y(s) + 6 \cdot y(s) = k \cdot s \cdot u(s)$$

$$y(s) \cdot (2 \cdot a \cdot s^2 + b \cdot s + 6) = k \cdot s \cdot u(s)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k \cdot s}{2 \cdot a \cdot s^2 + b \cdot s + 6}$$

$$G(s) = \frac{ks}{2as^2 + bs + 6}$$

Współczynniki a, b, k są pewnymi parametrami.

Zadania:
1. Przyjąć a=b=1. Wykonać symulację pracy dla wymuszenia w postaci skoku jednostkowego (step signal) u(t)=1 dla **k=1**, **k=2** i **k=4**. Zapisać wykresy do sprawozdania. Jak zmienia się odpowiedź układu dla tych parametrów?
2. Przyjąć k=2. Zbadać, jaki jest wpływ parametru **a** oraz parametru **b** (<u>Uwaga: parametry a i b zmieniać w zakresie 0-10. Jeżeli to konieczne wydłużyć czas symulacji</u>). Zapisać wykresy do sprawozdania.
3. Co się stanie, jeżeli b=0?
4. Jak wygląda pochodna y'(t) dla a=b=k=1? Uzupełnić program o wyznaczenie pochodnej y(t).

SPRAWOZDANIE
W sprawozdaniu należy zamieścić:
1. Zrzut ekranu panelu czołowego i kodu graficznego wykonanego programu.
2. Zapisane wykresy dla poszczególnych zadań wraz z opisami i komentarzami.