POLITECHNIKA OPOLSKA
KATEDRA MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Symulacja systemów mechatronicznych

Instrukcja do ćwiczeń laboratoryjnych

Modelowanie z zastosowaniem wektora stanu i wektora wyjściowego w module LabVIEW Control Design and Simulation

Opracował: Dr hab. inż. Roland Pawliczek

Opole 2022

1. Cel ćwiczenia

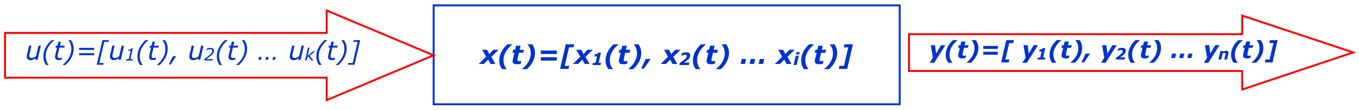
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z interfejsem użytkownika środowiska LabVIEW i modułu Control Design and Simulation oraz jego wykorzystaniem jako narzędzia do modelowania i symulacji układów dynamicznych z wykorzystaniem zmiennych stanu.

Zakres ćwiczenia obejmuje zdefiniowanie zmiennych stanu, przekształcenie modelu matematycznego w celu uzyskania równań stanu i wektora stanu oraz zdefiniowanie wektora wyjściowego dla zadanego obiektu. Następnie należy zbudować model komputerowy i wyznaczyć przebieg zmiany parametrów wektora stanu i wektora wyjściowego.

2. Równania stanu, wektor stanu

Zmienne stanu to pewne wielkości, za pomocą których możliwe jest opisanie stanu obiektu lub procesu w dowolnej chwili czasu t.

Wektor stanu: najmniejszy zbiór wielkości x(t) taki, że gdy znany jest zbiór (wektor) wartości zmiennych stanu w chwil t_0 oraz przebieg wielkości wejściowych u(t) (wymuszenia i zakłócenia) w przedziale $[t_0,t]$, to można wyznaczyć przebiegi czasowe zmiennych stanu x(t) oraz wielkości wyjściowych y(t) w tym przedziale.



Układ równań różniczkowych pierwszego rzędu dla zmiennych stanu, rozwiązanych względem pierwszych pochodnych zmiennych stanu, nazywamy *równaniem stanu*, zaś metoda analizy obiektu oparta na sformułowaniu, a następnie rozwiązaniu równań stanu nazywamy *metodą zmiennych stanu*.
Jeżeli obiekt zawiera *i* zmiennych stanu można sformułować *i* równań różniczkowych pierwszego rzędu. Liczba zmiennych stanu zwykle jest równa liczbie parametrów, które cechują się dynamiką (są zmienne w czasie).

3. Wektor stanu a wektor wyjściowy

Przekształcając równania stanu dla przyjętego wektora stanu $x(t)=[x_1, x_2 \dots x_i]^T$ względem pochodnych dx_i/dt można zapisać je w postaci macierzowej (przy założeniu $u_k(t)=u(t)$, gdzie k=1)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2i} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ii} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \end{bmatrix} u(t)$$

Może być zapisany w krótszej formie jako

$$x' = Ax(t) + Bu(t)$$

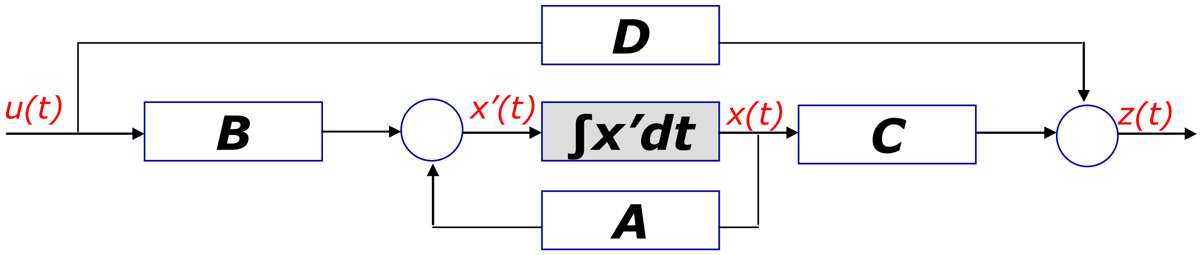
gdzie: x`- pochodna wektora stanu, u – wektor wejściowy (sterowanie), x - wektor stanu, A,B - macierze systemowe, zawierają zwykle elementy stałe w układzie.

Można zdefiniować tzw. *wektor wyjściowy* dla danego wektora stanu

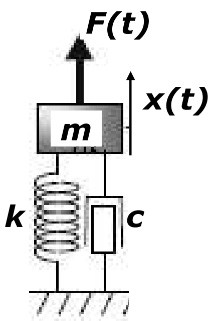
$$z = Cx(t) + Du(t)$$

gdzie: u –wektor wejściowy, x - wektor stanu, C – macierz wyjściowa modelu obiektu (jak zmienne wejściowe zależą od składowych wektora stanu), D – macierz przejścia modelu (jak zmienne wyjściowe zależą od wektora wejściowego– zwykle D=0).

Wykorzystując wektor stanu oraz wektor wyjściowy można zbudować schemat blokowy układu.



Przykład:
Wyznaczyć wektor stanu dla układu drgającego i zbudować model symulacyjny.



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(t) - \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x$$

Wektor stanu: $z = [x, v] \rightarrow v = \dfrac{dx}{dt}$

Po uporządkowaniu:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{c}{m}v + \dfrac{F(t)}{m} \end{cases}$$

W celu określenia macierzy systemowych A i B wygodnie jest uzupełnić równania dla wszystkich zmiennych stanu wstawiając zera, gdy dana zmienna nie występuje w równaniu:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \cdot x + v + 0 \cdot F(t) \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{c}{m}v + \dfrac{F(t)}{m} \end{cases}$$

Stosując zapis macierzowy otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}F(t)$$

Chcąc obliczyć siłę w sprężynie F_k oraz np. opór F_c podczas ruchu:

$$F_k = k \cdot x$$

$$F_c = c \cdot v$$

Wektor wyjściowy:

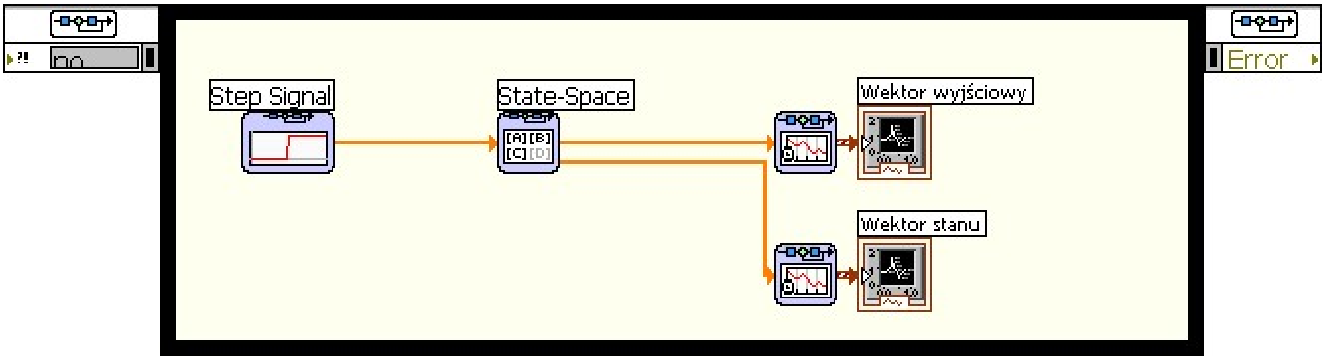
$$\begin{bmatrix} F_k \\ F_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}F(t)$$

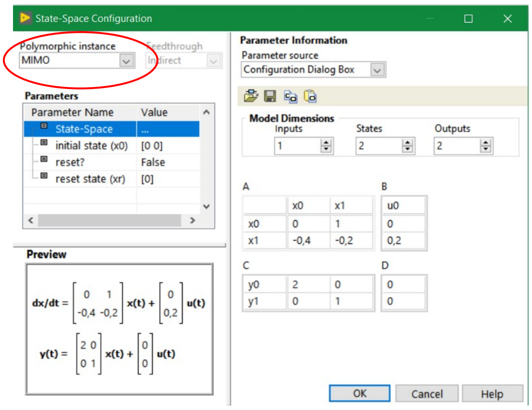
Dla wartości parametrów m=5, c=1 i k=2:

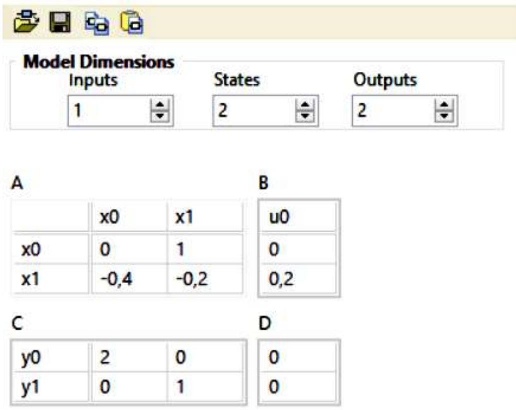
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} F(t)$$

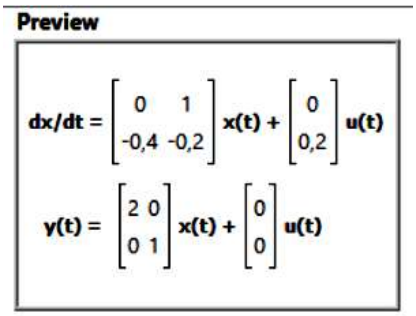
$$\begin{bmatrix} F_k \\ F_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

Model komputerowy w LabVIEW z wykorzystaniem pętli symulacyjnej:







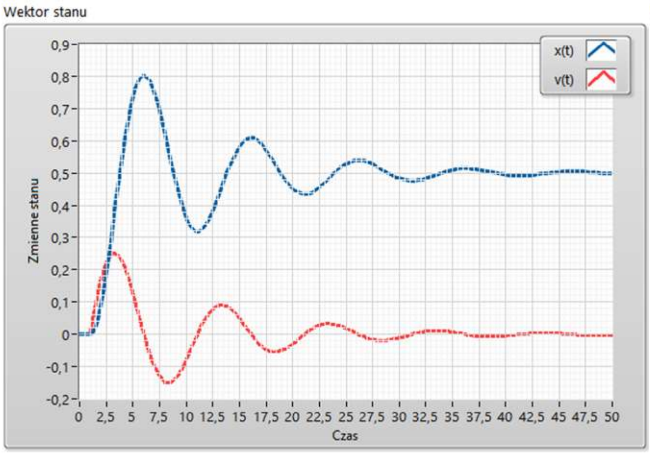


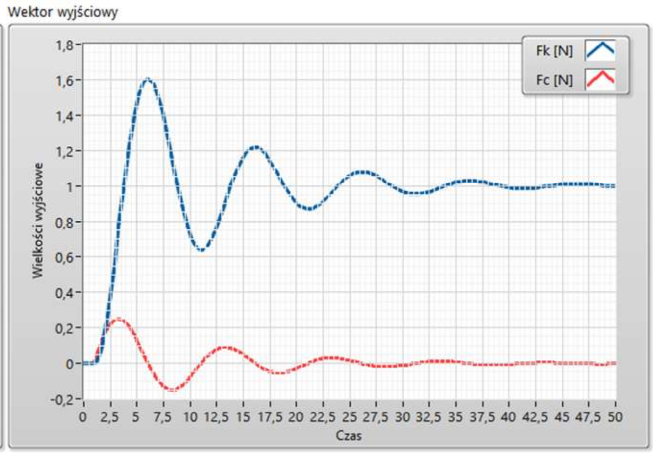
W oknie konfiguracyjnym *State-Space Configuration* należy ustawić parametry:

Polimorphic instance: MIMO

Model Dimensions:	***Input:***	***1***	
	States:	***i***	gdzie *i* jest liczbą zmiennych stanu $x_i(t)$ (tutaj 2)
	Outputs:	***n***	gdzie *n* jest liczbą składowych wektora wyjściowego $y_n(t)$ (tutaj 2)

Jako rezultat zostaną wyświetlone przebiegi czasowe zmiennych stanu i wielkości wyjściowych dla zadanego wymuszenia (w tym przypadku skok jednostkowy – StepSignal)

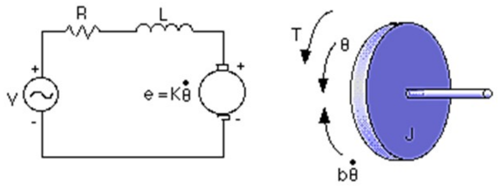




UWAGA: zwrócić uwagę na czytelność wykresów i w razie konieczności zmienić czas trwania symulacji.

4. ZADANIE

Wykonać symulację fazy rozruchowej silnika prądu stałego z wykorzystaniem modelu zmiennych stanu.
Uproszczony model silnika :



*Moment obrotowy **T** jest związany z natężeniem prądu i w obwodzie za pomocą współczynnika proporcjonalności **K**, zaś indukowane napięcie **e** jest zależne od prędkości kątowej wirnika według następujących równań*

$$T = Ki$$

$$e = K\omega = K\frac{d\theta}{dt}$$

Wykorzystując prawo Kirchoffa dla obwodu elektrycznego oraz równanie dynamiki ruchu obrotowego wirnika można zapisać

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\frac{d\theta}{dt}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = Ki$$

Lub po przekształceniu :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri + V - K\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + = \frac{1}{J}\left(Ki - b\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Przyjmujemy zmienne stanu x_1=i oraz $x_2=\frac{d\theta}{dt}$ → wektor zmiennych stanu $z = [x_1, x_2] = \left[i, \frac{d\theta}{dt}\right]$.

Biorąc pod uwagę, że $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{dx_2}{dt}$ oraz podstawiając U=V otrzymuje się

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{R}{L}\cdot x_1 - \dfrac{K}{L}\cdot x_2 + \dfrac{1}{L}\cdot U \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{K}{J}\cdot x_1 - \dfrac{b}{J}\cdot x_2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{R}{L}\cdot x_1 - \dfrac{K}{L}\cdot x_2 - \dfrac{1}{L}\cdot U \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{K}{J}\cdot x_1 - \dfrac{b}{J}\cdot x_2 + 0\cdot U \end{cases}.$$

Zapisując **wektor stanu** w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{K}{L} \\ \dfrac{K}{J} & -\dfrac{b}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Należy wyznaczyć prędkość obrotową wirnika n [obr/min] oraz moment T [Nm]:

$$T = K\cdot i = K\cdot x_1$$

$$n = \frac{30}{\pi}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{\pi}\cdot x_2$$

Stąd **wektor wyjściowy** y=[T, n]:

$$\begin{bmatrix} T \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \dfrac{30}{\pi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Parametr	Nazwa	Wartość	Jednostka
R	opór elektryczny	3,3	Ω
K	stała mechaniczna silnika	0,028	Nm/A
L	indukcyjność	2,75	μH
J_w	moment bezwładności wirnika	$9{,}64\cdot 10^{-6}$	$\frac{kg\ m^2}{s^2}$
b	wsp. yłumienia mechanicznego	0,000001	Nms

W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. Postać macierzy A, B, C, D po uwzględnieniu zadanych parametrów.
2. Kod programu (Block Diagram)
3. Zapisane wykresy.
4. Komentarze i wnioski dotyczące wyników symulacji.