Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

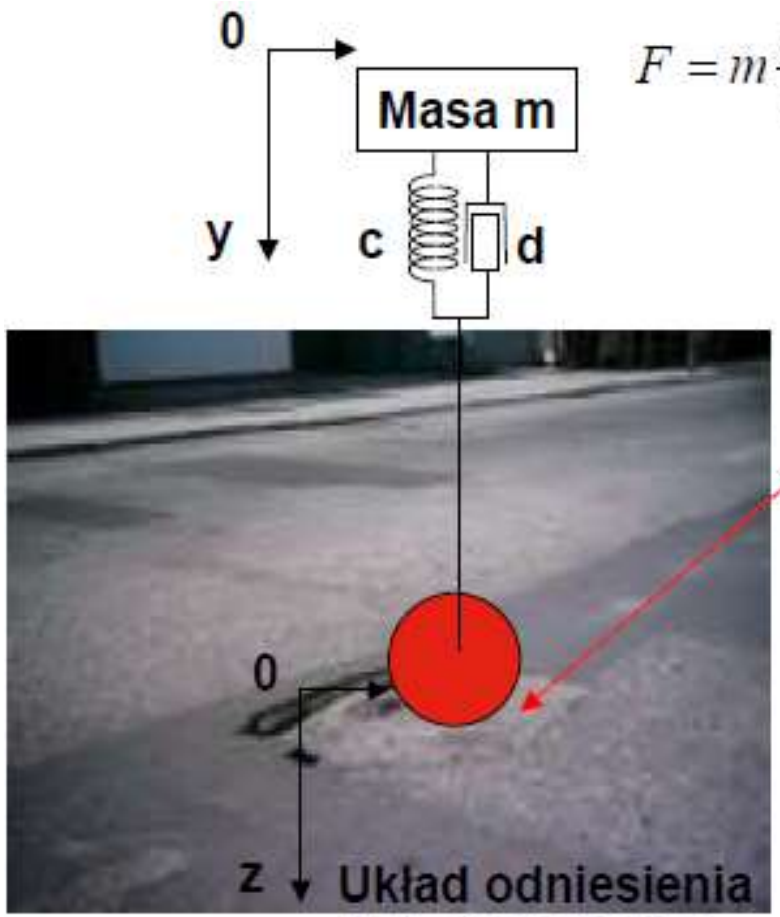
Symulacja systemów mechtronicznych

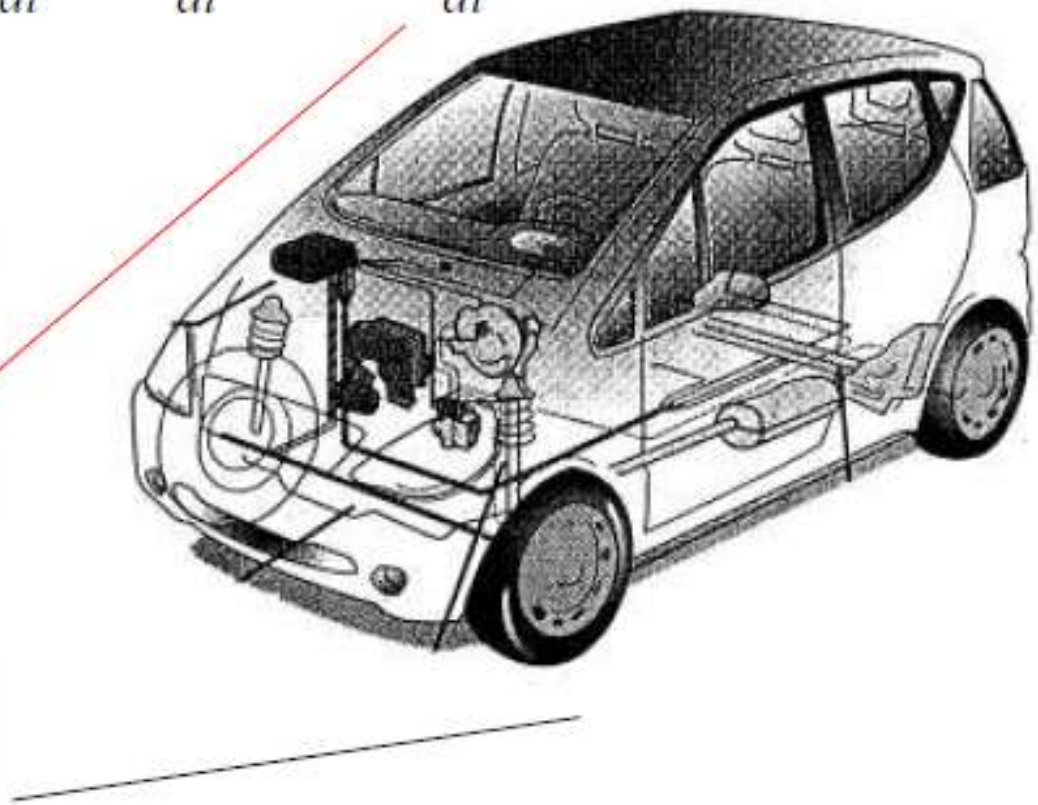
Modele matematyczne układów

dr hab. inż. Roland PAWLICZEK

Równania różniczkowe

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} + d\frac{dy}{dt} + cy = d_1\frac{dz}{dt} + c_1 z$$





Równania różniczkowe – przekształcenie Laplace`a

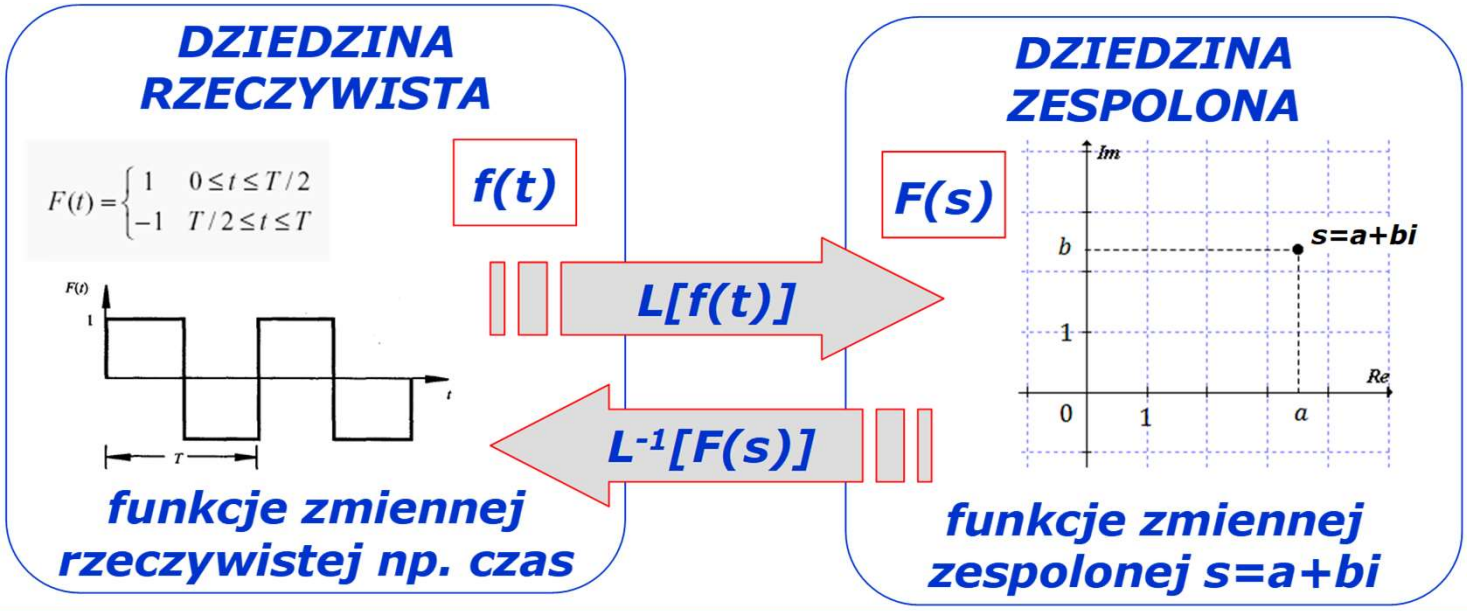
*Przekształcenie przeprowadzające pewną funkcję **f(t)** (tzw. **oryginał**), w funkcję zmiennej zespolonej **f(s)** (tzw. **obraz**), przy czym*

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

gdzie: $\boldsymbol{s \in C}$*; C – zbiór liczb zespolonych,*

s – liczba zespolona,

t – czas.



Równania różniczkowe – przekształcenie Laplace`a

Przykład: $\frac{dy}{dt} - 3y = 1$

$$L\left(\frac{dy}{dt} - 3y\right) = L(1)$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) - 3L(y) = L(1)$$

$$L(y') - 3L(y) = L(1)$$

$L(y') = sy(s) - y(0)$

$dla\ y(0) = 0 \qquad L(y') = sy(s)$

$3L(y) = 3y(s)$

$L(a) = \frac{a}{s}$ $czyli$ $L(1) = \frac{1}{s}$

$$sy(s) - 3y(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) \cdot (s-3) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(s) = \frac{1}{s(s-3)} = \frac{1}{s^2 - 3s}}$$

Równania różniczkowe – przekształcenie Laplace`a

dla $y(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$

z tablic $F(s) = \dfrac{1}{s(s+\alpha)}$ $\rightarrow$ tutaj $\alpha = -3$

oryginał z tablic $y(t) = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$

ostatecznie $y(t) = -\dfrac{1}{3}(1 - e^{3t}) = \dfrac{1}{3}(e^{3t} - 1)$

lp.	Oryginał	Transformata
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$	1
3	αt	$\frac{\alpha}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$
6	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
7	$\cos\alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
8	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$

Przekształcenie Laplace`a - transmitancja

$$T\frac{dy}{dt}+y=u$$

$$Tsy(s)+y(s)=u(s)$$

$$y(s)\cdot(Ts+1)=u(s)$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+2u$$

$$s^2y(s)+2sy(s)+2y(s)=su(s)+2u(s)$$

$$y(s)\cdot(s^2+2s+2)=u(s)\cdot(s+2)$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

Wektor stanu

Przykład: dla równania różniczkowego

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 2u$$

wstawiając

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{du}{dt} + 2u = u(t)$$

Wektor stanu *dla zmiennych* ***y*** *i* ***v*** *można zapisać jako*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -2v - 2y + u(t) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Wektor stanu

Wektor stanu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Może być zapisany w krótszej formie jako

$$\dot{x} = \mathbf{A}\,x + \mathbf{B}\,u$$

gdzie: ***u*** *jest wektorem wejściowym (sterowanie),* ***x*** *jest wektorem stanu,* ***A*** *i* ***B*** *macierze systemowe.*

Można zdefiniowaćtzw. ***Wektor wyjściowy*** *dla danego wektora stanu*

$$z = \mathbf{C}\,x + \mathbf{D}\,u$$

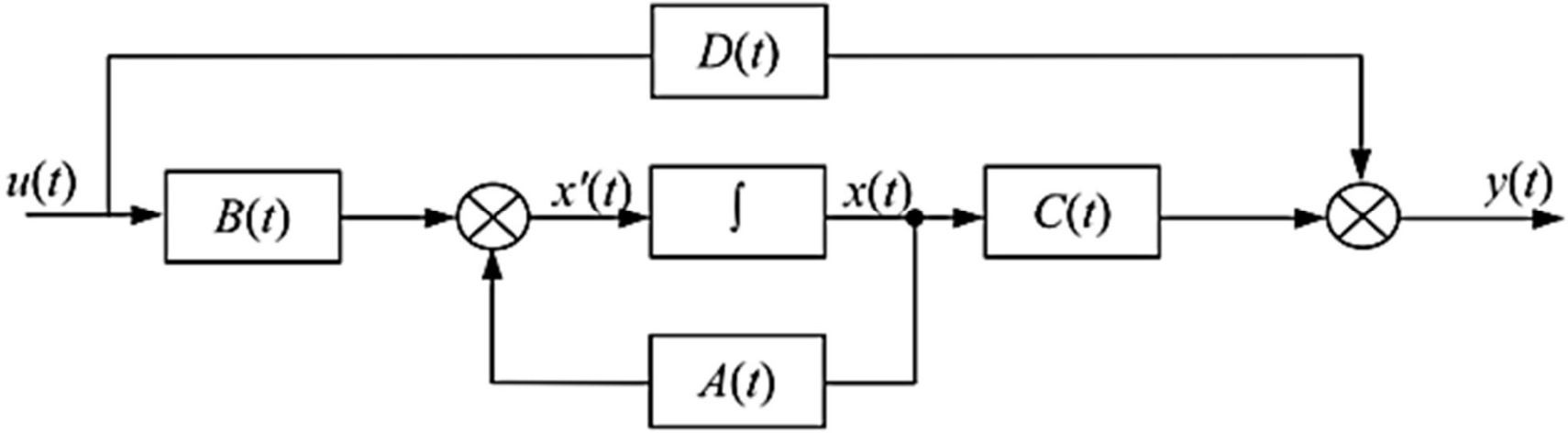
where: ***u*** *–wektor wejściowy,* ***x*** *wektor stanu,*

C *– macierz wyjściowa modelu obiektu (jak zmienne wejściowe zależą od składowych wektora stanu),*

D *– macierz przejścia modelu (jak zmienne wyjściowe zależą od wektora wejściowego– zwykle* ***D=0****).*

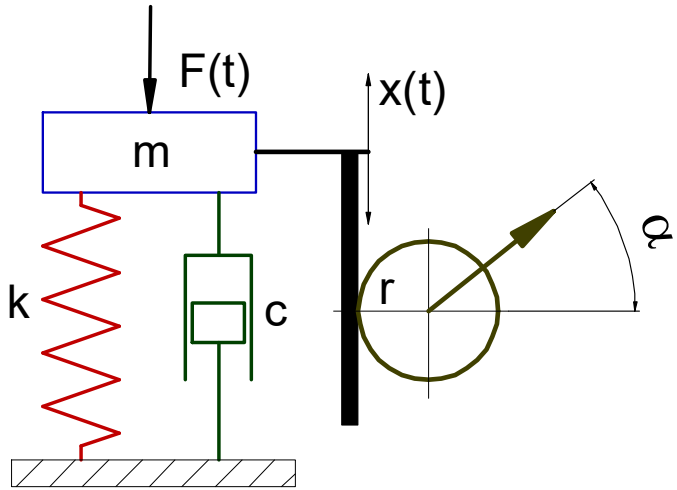
Wektor stanu

$$\dot{x} = \mathbf{A}\,x + \mathbf{B}\,u \qquad\qquad z = \mathbf{C}\,x + \mathbf{D}\,u$$



Układ oscylacyjny - wektor stanu

Przykład: zawór



F – siła
m – masa
k – stała sprężyny
c – wsp. tłumienia
x – przemieszczenie
r – promień
a - kąt

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}F(t)-\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}-\frac{k}{m}x$$

Wektor stanu – wektor wyjściowy

Wektor stanu $[x,v]^T$:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F(t)}{m} - \dfrac{c}{m}v - \dfrac{k}{m}x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

Zakładając wektor wyjściowy $z = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$ *w postaci*

$$\begin{bmatrix} F_{spr} \\ F_{damp} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

gdzie

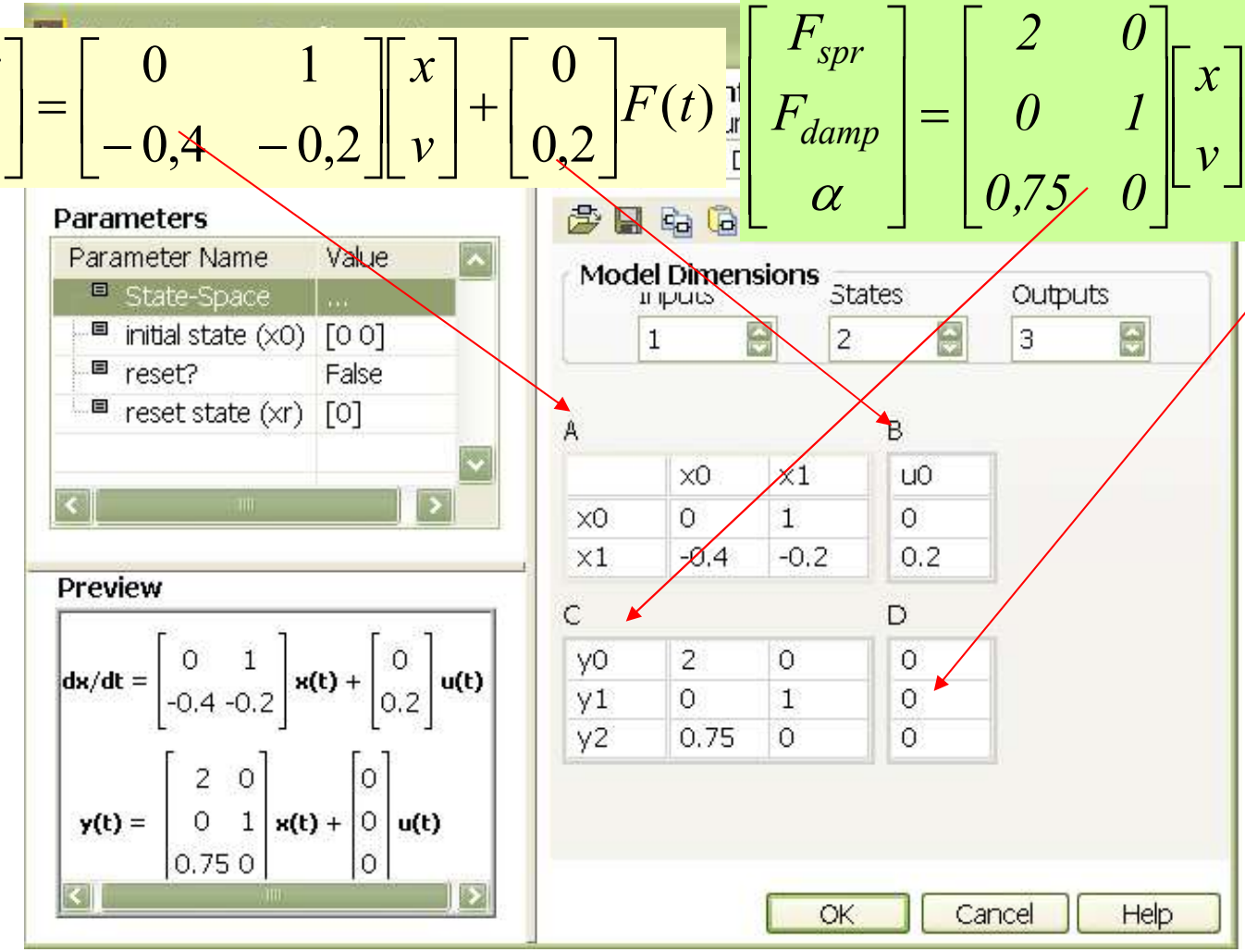
$$F_{spr} = kx; \qquad F_{damp} = cv; \qquad \alpha = \frac{x}{r};$$

Wektor stanu – wektor wyjściowy

Dla wartości parametrów ***m=5, c=1, k=2, r=0.75****:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} F(t)$$

$$\begin{bmatrix} F_{spr} \\ F_{damp} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

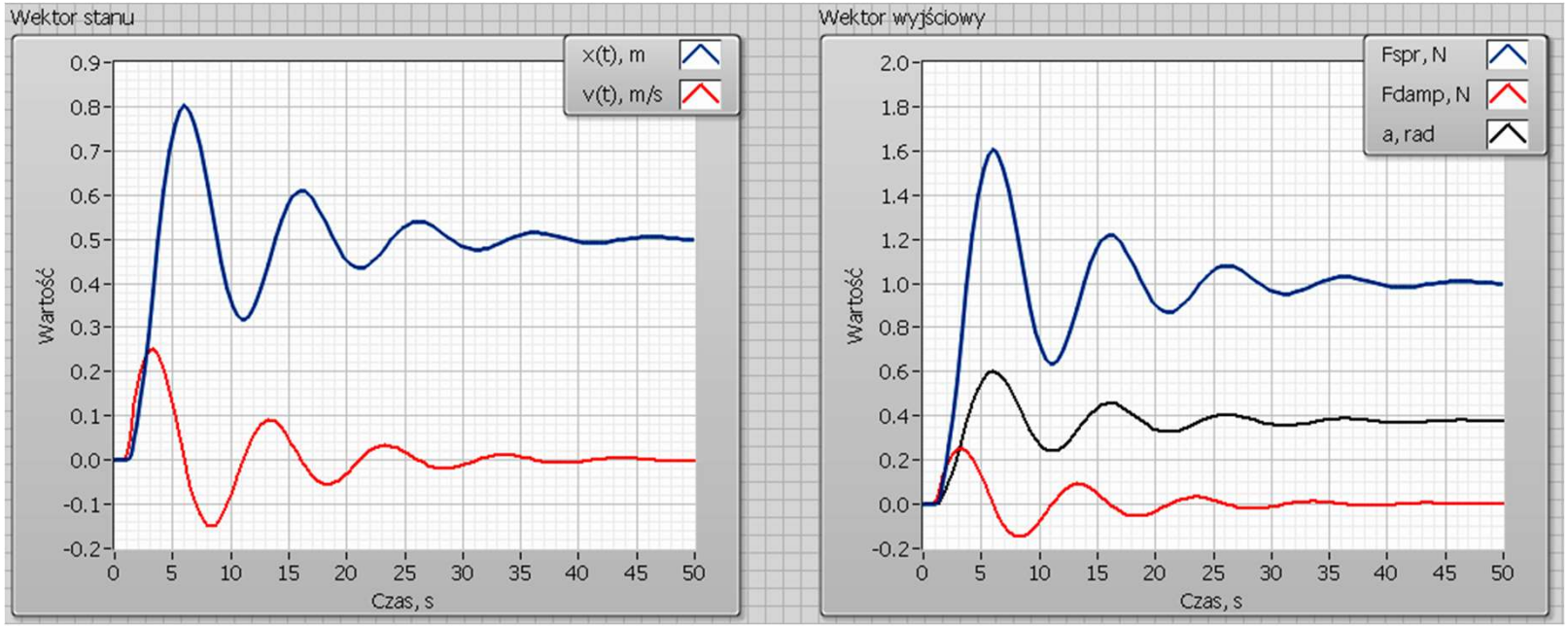


Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Dla wartości parametrów ***m=5, c=1, k=2, r=0.75****:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} F(t) \qquad \begin{bmatrix} F_{spr} \\ F_{damp} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

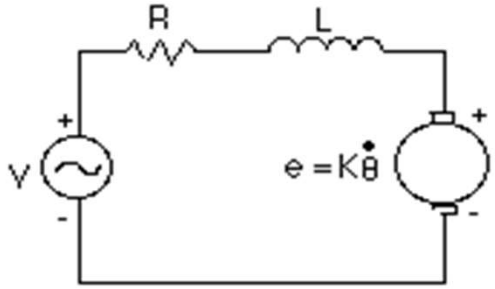
otrzymujemy wyniki

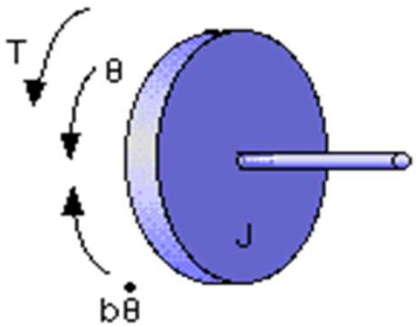


Symulacja pracy

Model silnika elektrycznego: *obwód elektryczny stojana i uwolniony z więzów model wirnika:*

*Moment obrotowy **T** jest związany z natężeniem prądu **i** w obwodzie za pomocą współczynnika proporcjonalności **K**, zaś napięcie indukowane **e** jest zależne od prędkości kątowej wirnika*





$$T = Ki$$

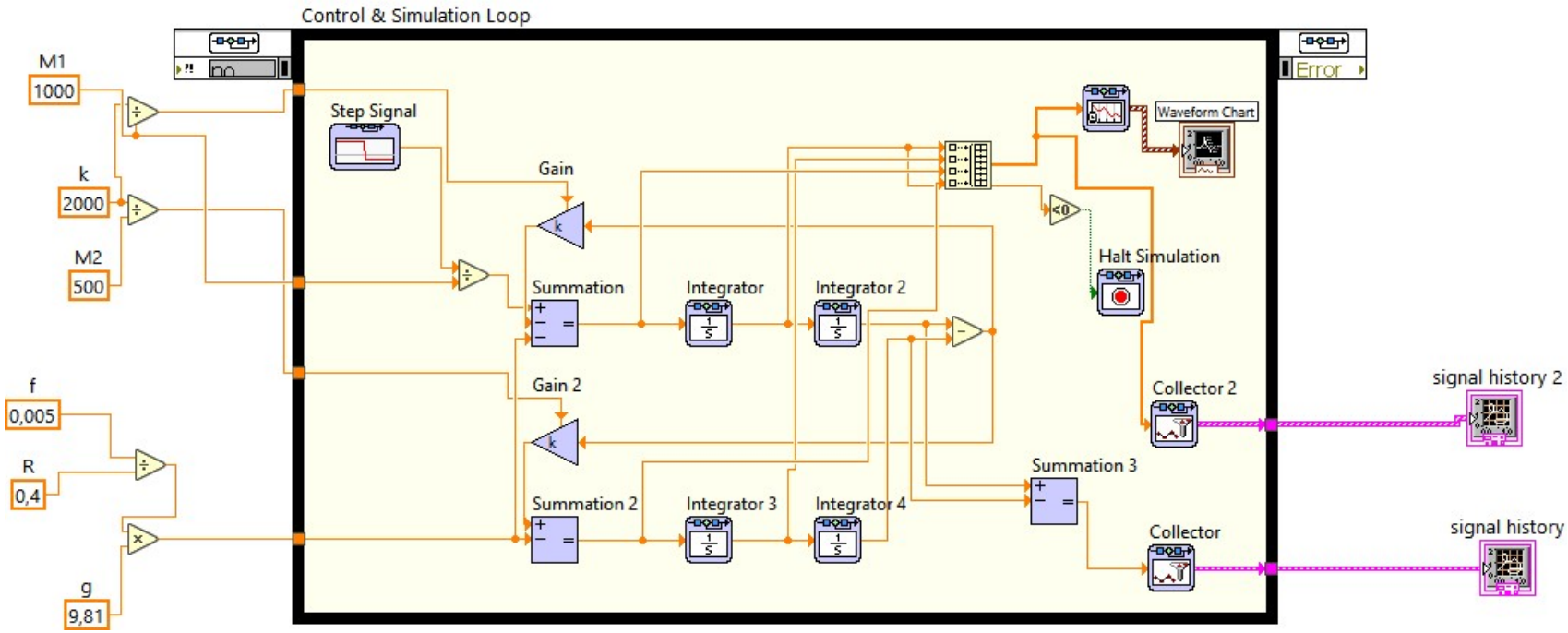
$$e = K\omega = K\frac{d\theta}{dt}$$

Wykorzystując prawo Kirchoffa dla obwodu elektrycznego oraz równanie dynamiki ruchu obrotowego wirnika można zapisać

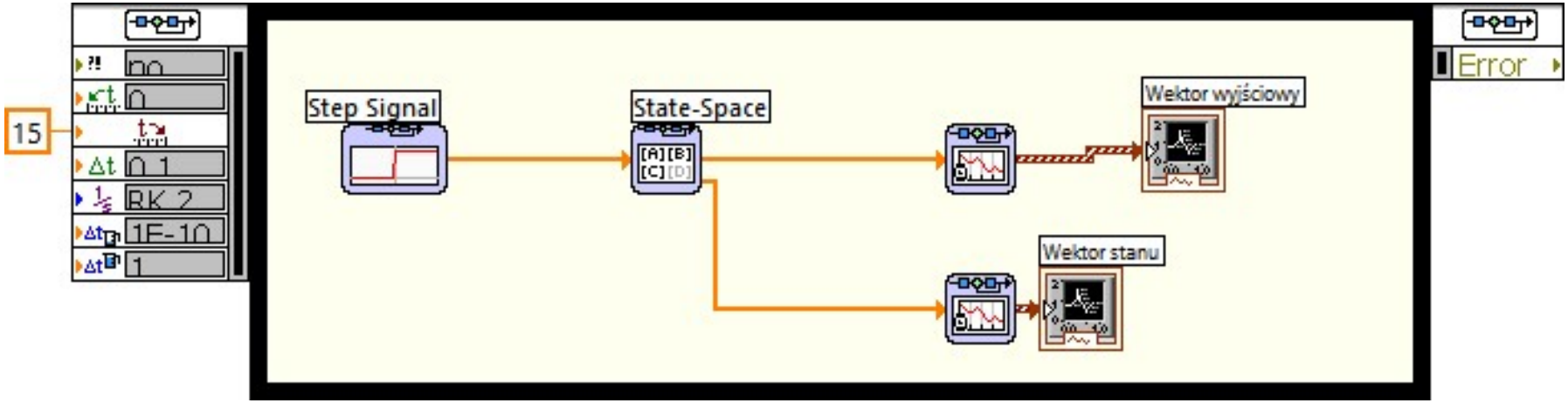
$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\frac{d\theta}{dt}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = Ki$$

Symulacja pracy - narzędzia



Symulacja pracy - narzędzia



Symulacja pracy - narzędzia