Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

Symulacja systemów mechtronicznych

Metoda Lagrange'a opisu układu dynamicznego

dr hab. inż. Roland PAWLICZEK

Równanie Lagrange'a

Ogólna postać równania:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i$$

Q_i - siła uogólniona
L - potencjał kinetyczny
q_i - współrzędna uogólniona
$\dot{q}_i$ - prędkość uogólniona

Potencjał kinetyczny (Lagrangian):

L = Energia_kinetyczna – Energia_potencjalna

Liczba stopni swobody: ***s=n-w***
s – liczba stopni swobody układu
n – liczba współrzędnych opisujących ruch wszystkich ciał
w – liczba więzów kinematycznych

Równanie Lagrange'a

Jeżeli energia kinetyczna nie zależy od współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{\partial E}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial (E - U)}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right] + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

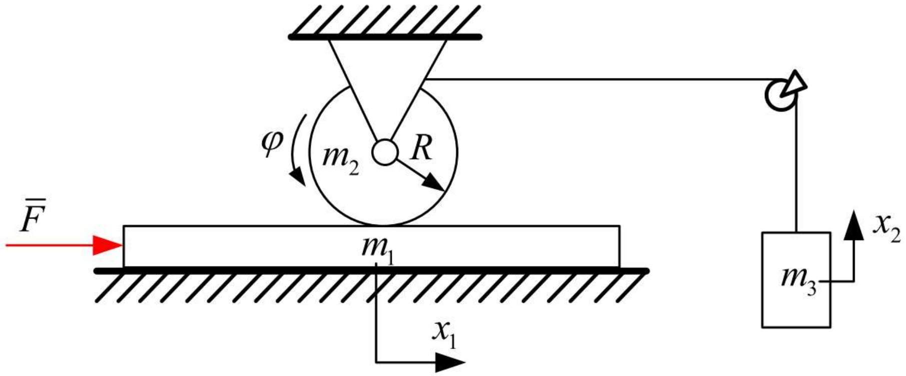
Dla obiektów z dyssypacją (rozproszeniem energii):

$$D = \tfrac{1}{2} b \dot{q}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Równanie Lagrange'a

Przykład: obliczyć przyspieszenie brył w układzie



<u>współrzędne: </u>$\{x_1, x_2, \varphi\}$ $n=3$

<u>równanie więzów: </u>$x_1= \varphi R$, $x_2= \varphi R$ (φR – długość łuku) $w=2$

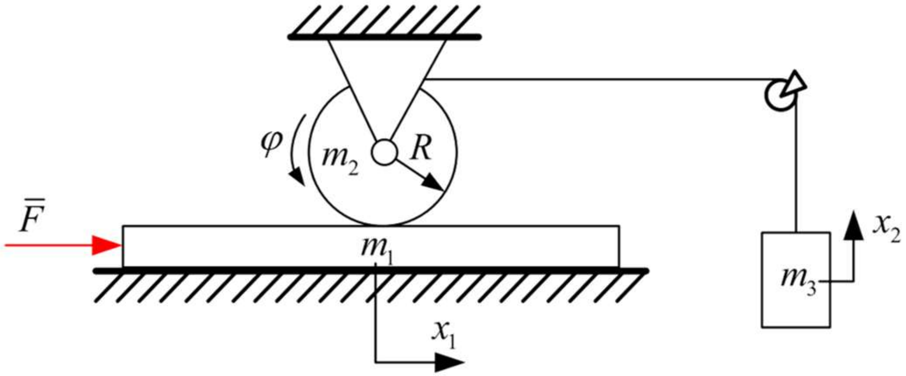
(wynika z powiązania ruchu poszczególnych elementów):

<u>liczba stopni swobody: </u>$s= n - w = 3 - 1 = 1$

$s=1$ oznacza, że tylko jedna współrzędna jest niezależna, np. dla danej wartości x_1 pozostałe współrzędne $\{x_2, \varphi\}$ są jednoznacznie określone za pomocą równania więzów.

Równanie Lagrange'a

Energia w układzie:



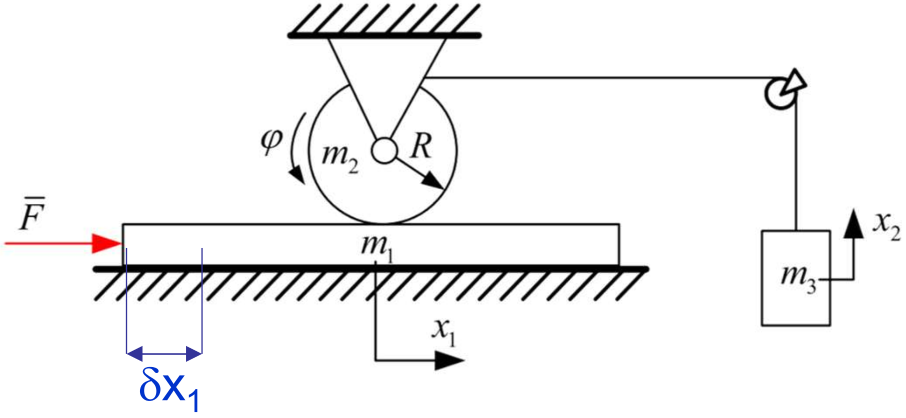
$$E=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{m_3\dot{x}_2^2}{2}=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_1^2}{4}+\frac{m_3\dot{x}_1^2}{2}=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2\left(m_1+\frac{m_2}{2}+m_3\right)$$

$$U=m_3 g x_2=m_3 g x_1$$

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2\left(m_1+\frac{m_2}{2}+m_3\right)-m_3 g x_1$$

Równanie Lagrange'a

Praca wirtualna w układzie:



Praca sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach δx_1

$$\delta W = F\delta x_1$$

$$Q_{x1} = F$$

Równanie Lagrange'a

Pochodne:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3\right) - m_3 g x_1$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \ddot{x}_1\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -m_3 g$$

Równanie Lagrange'a

Równania ruchu:

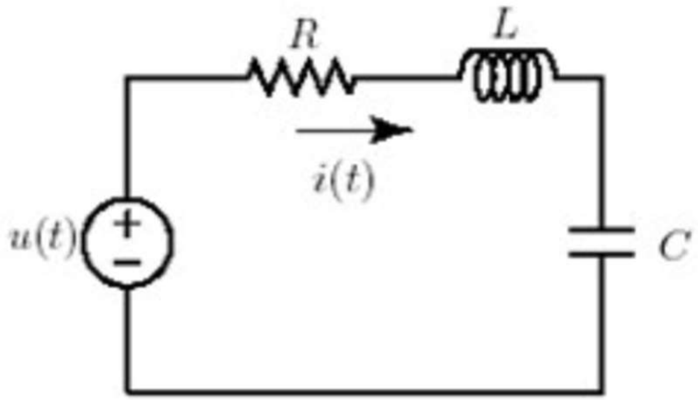
$$\ddot{x}_1\left(m_1+\frac{m_2}{2}+m_3\right)+m_3g=F$$

$$\ddot{x}_1=\ddot{x}_2=\frac{F-m_3g}{m_1+\frac{m_2}{2}+m_3}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{F-m_3g}{R\left(m_1+\frac{m_2}{2}+m_3\right)}$$

Równanie Lagrange'a

Układ RLC:



$$K_e = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

$$V = \frac{1}{2C}q^2$$

$$L = K_e - V = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2$$

$$P = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

Równanie Lagrange'a

Układ RLC:

$$u = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}}$$

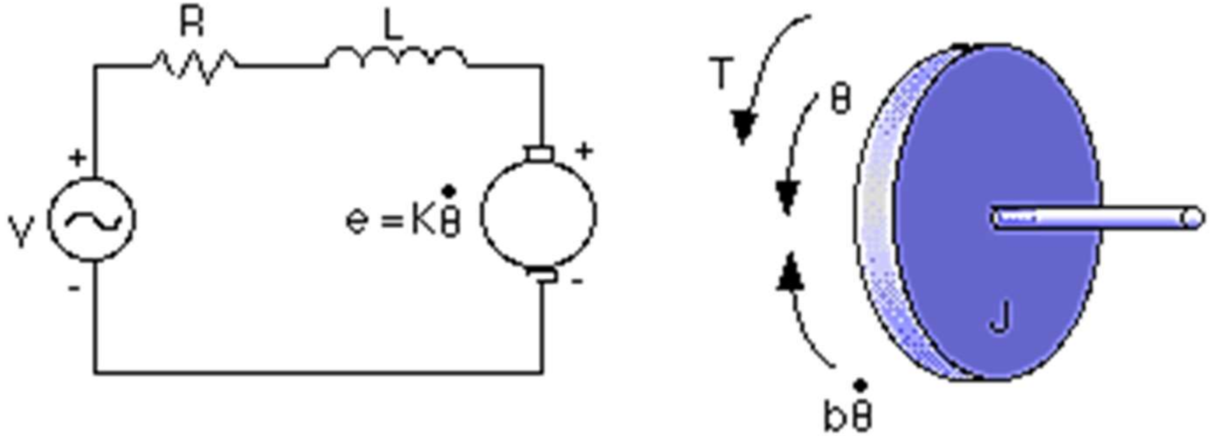
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}R\dot{q}^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(L\dot{q}) + \frac{Q}{C} + R\dot{q} = L\ddot{q} + \frac{Q}{C} + R\dot{q} = L\frac{di}{dt} + v_c + Ri$$

Wprowadzenie do zajęć laboratoryjnych nr 2

Uproszczony model silnika prądu stałego

Obwód elektryczny twornika i model wirnika:



*Moment obrotowy **T** jest związany z natężeniem prądu i w obwodzie za pomocą współczynnika proporcjonalności **K**, zaś indukowane napięcie **e** jest zależne od prędkości kątowej wirnika według następujących równań*

$$T = Ki$$

$$e = K\omega = K\frac{d\theta}{dt}$$

Uproszczony model silnika prądu stałego

Wykorzystując prawo Kirchoffa dla obwodu elektrycznego oraz równanie dynamiki ruchu obrotowego wirnika można zapisać

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\frac{d\theta}{dt}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = Ki$$

Aby wyznaczyć przebieg prądu w obwodzie elektrycznym i zmianę obrotów wirnika należy wykonać całkowania:

$$\int \frac{di}{dt} = i$$

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}$$

Uproszczony model silnika prądu stałego

Należy przekształcić układ równań do postaci:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri + V - K\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + = \frac{1}{J}\left(Ki - b\frac{d\theta}{dt}\right)$$

i wykorzystując metodę ogólną rozwiązywania równań wykonać obliczenia symulacyjne.