



**Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA**

Symulacja systemów mechtronicznych

Wyznaczanie transmitancji operatorowej

dr hab. inż. Roland PAWLICZEK

Przekształcenie Laplace'a

W najbardziej ogólnym przypadku sygnał wyjściowy $y(t)$ może być równaniem różniczkowym wyższego rzędu sygnału wejściowego $u(t)$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned}$$

gdzie

a_i dla $i=0..n$,

b_i , dla $i=0..m$

są stałymi współczynnikami równania

Przekształcenie Laplace'a

*Pierre-Simon markiz de Laplace
(23 III 1749 – 5 III 1827)*



Laplace wymyślił narzędzie matematyczne zwane transformatę $x(t) \rightarrow X(s)$ przekształcającą równanie z dziedziny czasu do dziedziny liczb zespolonych. Jego zaletą jest możliwość rozwiązania równania różniczkowego po przekształceniu go w równanie algebraiczne.

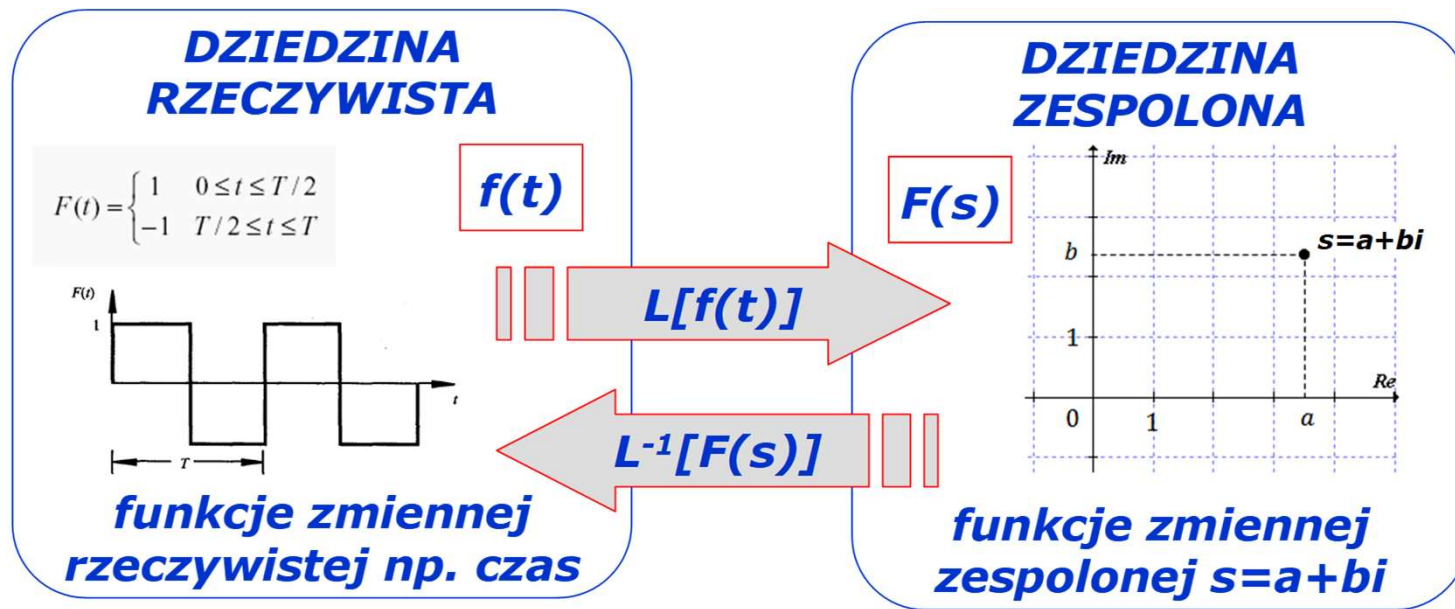
Należy przejść na płaszczyznę Gaussa $F(s)$, przekształcić równanie i otrzymać rozwiązanie w dziedzinie czasu posługując się odwrotną transformatą Laplace'a.

Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie przeprowadzające pewną funkcję **$f(t)$** (tzw. **oryginał**), w funkcję zmiennej zespolonej **$f(s)$** (tzw. **obraz**), przy czym

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

gdzie: **$s \in \mathbf{C}$** ; $\mathbf{C}$ – zbiór liczb zespolonych,
 s – liczba zespolona,
 t – czas.



Przekształcenie Laplace'a

Tablice transformacji:

lp.	Oryginal	Transformata
1	$I(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$	1
3	αt	$\frac{\alpha}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$
6	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$
7	$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
8	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$

Przekształcenie Laplace'a

Tw. o liniowości transformaty Laplace'a

$$L\left[\sum_{i=1}^n A_i f(t)\right] = \sum_{i=1}^n A_i L[f(t)]$$

$$L[\textcolor{red}{A} \cdot \textcolor{blue}{f(t)} + \textcolor{green}{B} \cdot \textcolor{purple}{f(p)}] = \textcolor{red}{A} \cdot L[\textcolor{blue}{f(t)}] + \textcolor{green}{B} \cdot L[\textcolor{purple}{f(p)}]$$

$$\text{np. } L[\textcolor{red}{3} \textcolor{blue}{y(t)} + \textcolor{green}{2} \textcolor{purple}{\sin(3t)}] = \textcolor{red}{3} \cdot L[\textcolor{blue}{y(t)}] + \textcolor{green}{2} \cdot L[\textcolor{purple}{\sin(3t)}]$$

Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a stosuje się do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych dowolnego rzędu, które sprowadza się do równania algebraicznego.

$$L[f'(t)] = sf(s) - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2f(s) - sf(0) - f'(0)$$

Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a stosuje się do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych dowolnego rzędu, które sprowadza się do równania algebraicznego.

$$L[f'(t)] = sf(s) - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2f(s) - sf(0) - f'(0)$$

Przekształcenie Laplace'a

Przykład: $\frac{dy}{dt} - 3y = 1$

$$L\left(\frac{dy}{dt} - 3y\right) = L(1)$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) - 3L(y) = L(1)$$

$$L(y') - 3L(y) = L(1)$$

$$L(y') = sy(s) - y(0)$$

$$\text{dla } y(0) = 0$$

$$L(y') = sy(s)$$

$$3L(y) = 3y(s)$$

$$L(a) = \frac{a}{s} \text{ czyli } L(1) = \frac{1}{s}$$

$$sy(s) - 3y(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) \cdot (s - 3) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{1}{s(s-3)} = \frac{1}{s^2 - 3s}$$

TRANSMITANCJA

Zwykle relacja pomiędzy sygnałem wyjściowym $y(t)$ i wejściowym $u(t)$ systemu jest opisywana za pomocą równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned}$$

lub z wykorzystaniem operatora Laplace'a:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 =: \underline{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

TRANSMITANCJA

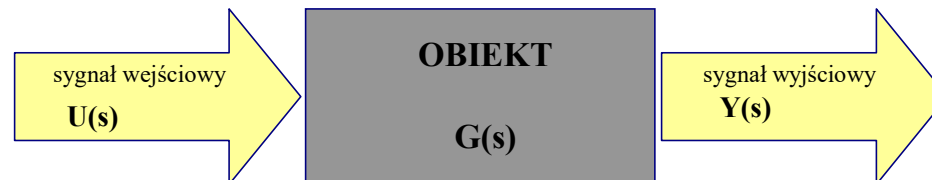
Funkcję przetwarzającą sygnał wejściowy na wyjściowy (transmitancja obiektu) można określić jako:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Def. Transmitancja operatorowa $G(s)$ (funkcja przejścia, przepustowość) to stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych równania różniczkowego

Jeżeli jest znana transmitancja operatorowa obiektu $G(s)$ oraz sygnał sterujący $U(s)$, to można wyznaczyć sygnał wyjściowy z obiektu

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



TRANSMITANCJA

Przykłady:

$$T \frac{dy}{dt} + y = u$$

$$Tsy(s) + y(s) = u(s)$$

$$y(s) \cdot (Ts + 1) = u(s)$$

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 2u$$

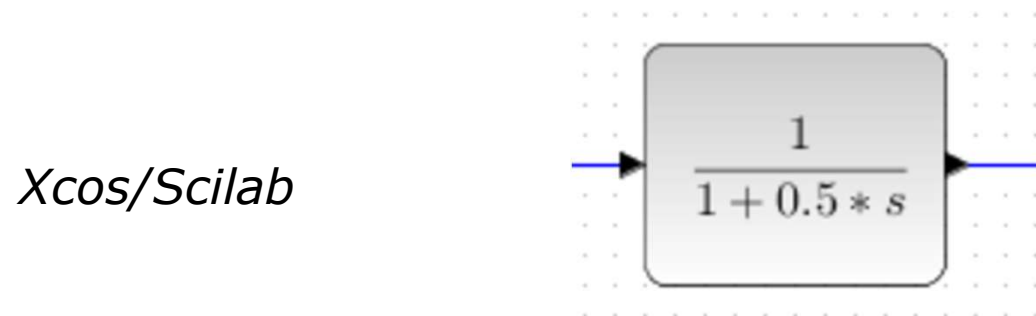
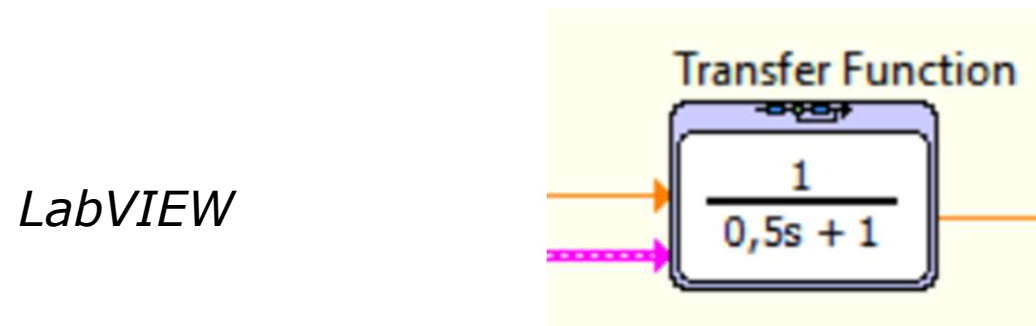
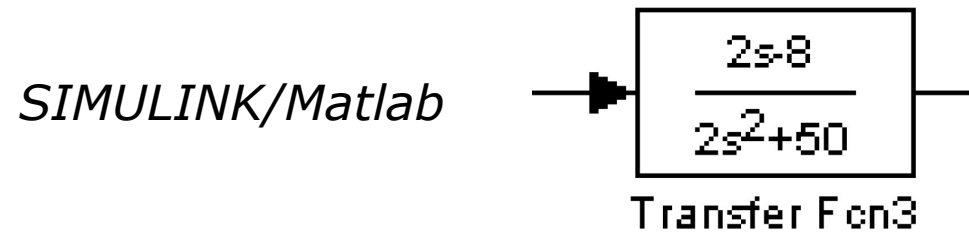
$$s^2y(s) + 2sy(s) + 2y(s) = su(s) + 2u(s)$$

$$y(s) \cdot (s^2 + 2s + 2) = u(s) \cdot (s + 2)$$

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

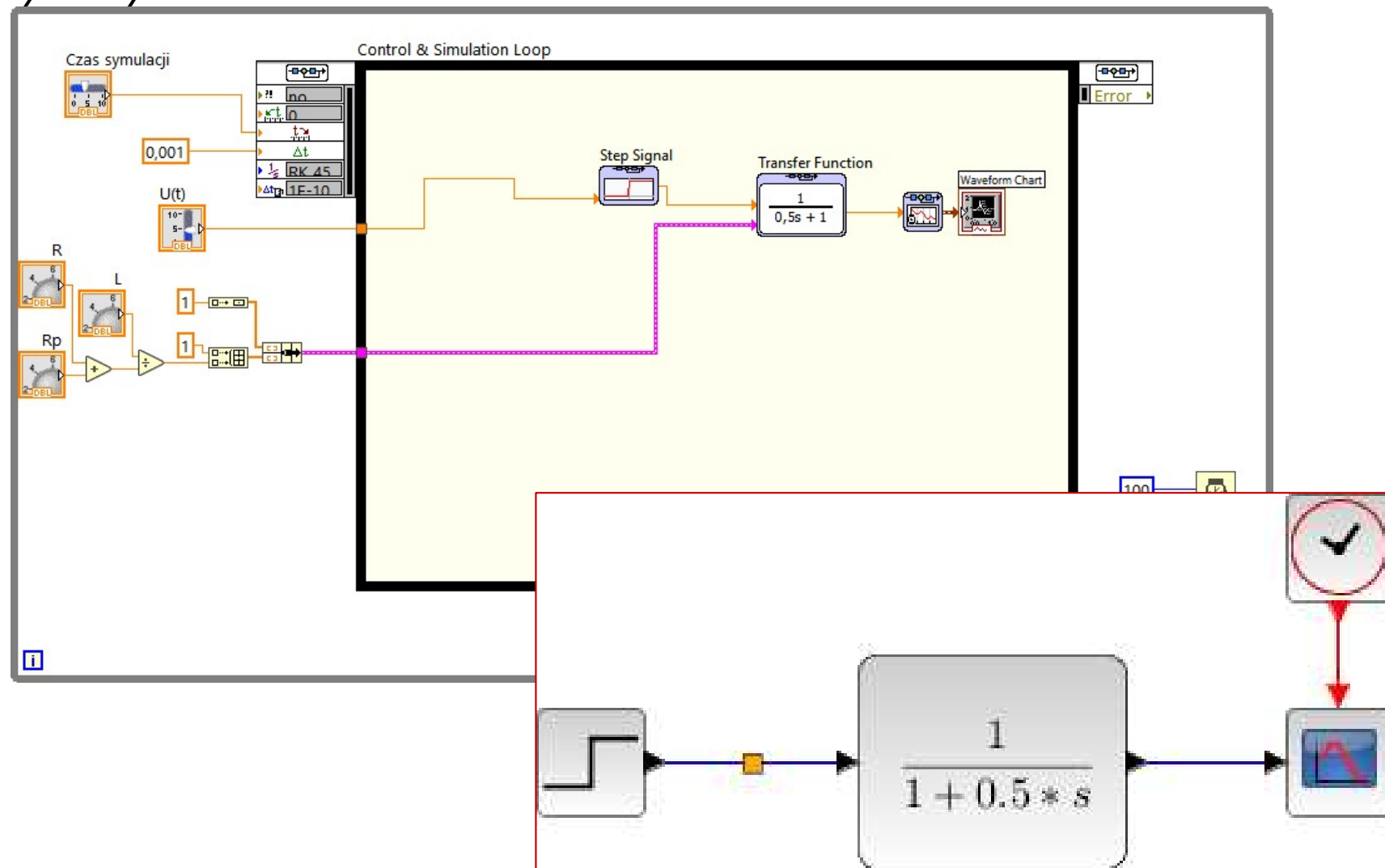
TRANSMITANCJA

Zastosowanie modelu transmitancyjnego w obliczeniach symulacyjnych



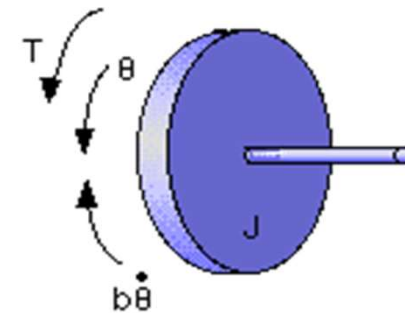
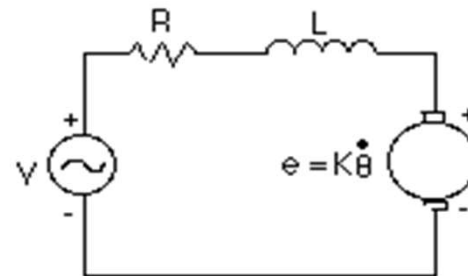
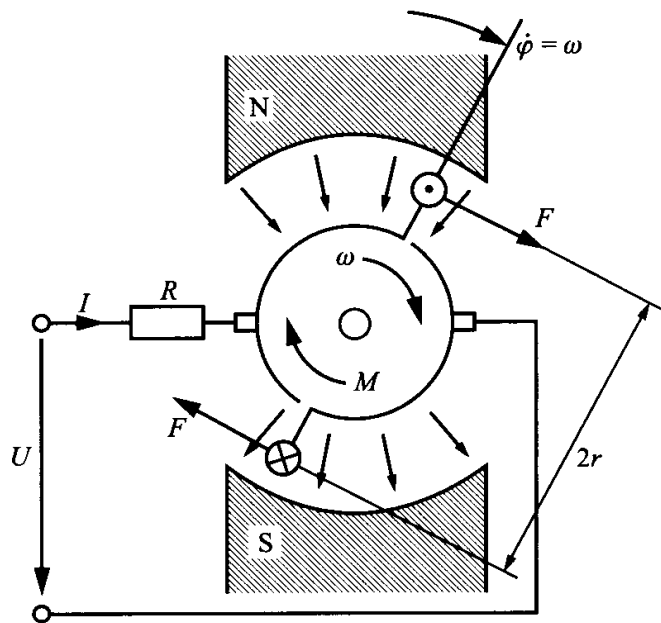
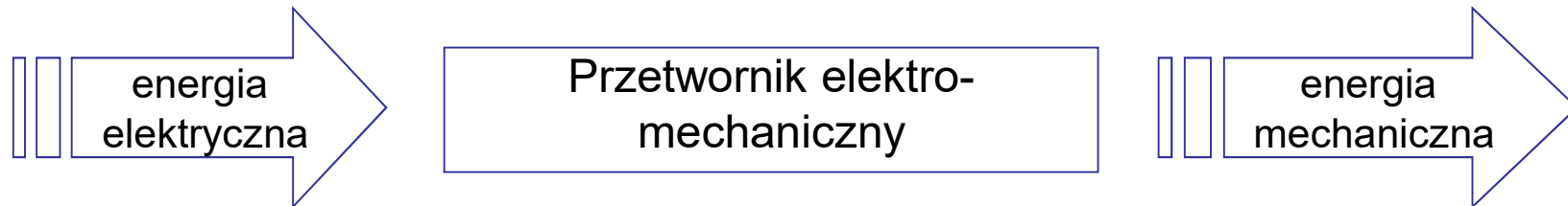
TRANSMITANCJA

Przykłady:



TRANSMITANCJA

Model matematyczny silnika prądu stałego wynika z jego budowy i funkcji:



J – moment bezwładności
 T – moment obrotowy
 b – współczynnik oporu
 K – stała elektromechaniczna silnika
 $\omega = d\theta/dt$ – prędkość obrotowa
 θ – kąt obrotu

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - e$$

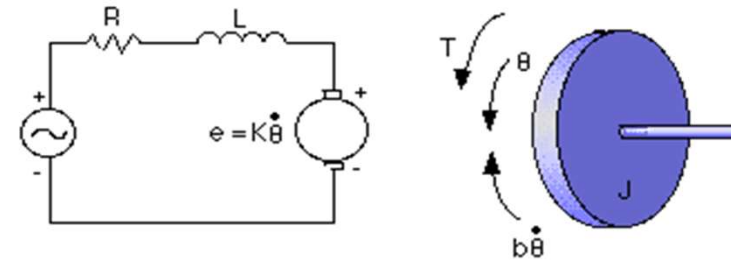
$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T$$

TRANSMITANCJA

Moment obrotowy T jest związany z natężeniem prądu i w obwodzie za pomocą współczynnika K , zaś indukowane napięcie e jest zależne od prędkości kątowej wirnika

$$T = Ki$$

$$e = K\omega = K \frac{d\theta}{dt}$$

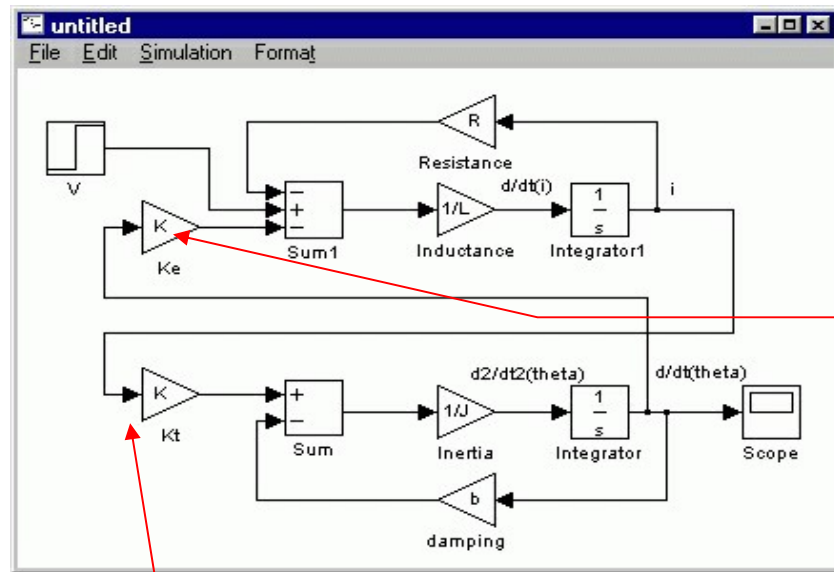


$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - K\omega$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = Ki$$

TRANSMITANCJA

Realizacja wg metody schematu operacyjnego:

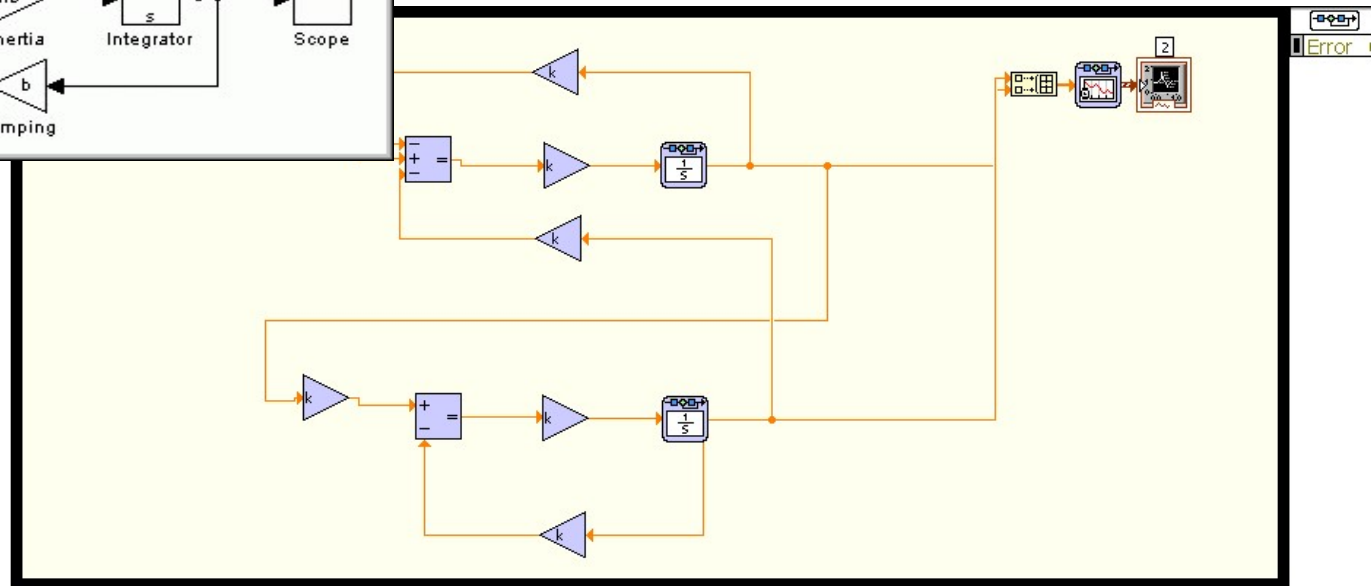


$K\omega$

K_i

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left(-Ri + V - K \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J} \left(Ki - b \frac{d\theta}{dt} \right)$$



TRANSMITANCJA

Przekształcenie Laplace'a

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - K\omega$$

$$L \cdot s \cdot i(s) + R \cdot i(s) = V(s) - K \cdot \omega(s)$$

$$i(s)(Ls + R) = V(s) - K \cdot \omega(s)$$

$$i(s) = \frac{V(s) - K \cdot \omega(s)}{Ls + R}$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = Ki$$

$$J \cdot s \cdot \omega(s) + b \cdot \omega(s) = K \cdot i(s)$$

$$\omega(s)(Js + b) = K \cdot i(s)$$

$$\omega(s)(Js + b) = K \frac{V(s) - K \cdot \omega(s)}{Ls + R}$$

TRANSMITANCJA

Przyjmując, że napięcie V jest sygnałem wejściowym a ω sygnałem wyjściowym, transmitancję operatorową układu można zapisać w postaci:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} = \frac{K}{JLs^2 + (JR + Lb)s + bR + K^2}$$

$$\mathbf{G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

Numerator=[K]

Denominator=[bR+K², Jr+Lb, JL]

TRANSMITANCJA

Transfer Function Configuration

Polymorphic instance: SISO Feedthrough: Indirect

Parameter Information
Parameter source: Configuration Dialog Box

Parameters

Parameter Name	Value
Transfer Function	...
reset?	False

Model Dimensions
Inputs: 1 Outputs: 1

Model

Preview

$$H(s) = \frac{0,0274}{8,878E-12s^2 + 1,29E-5s + 0,000765}$$

Numerator

b0	b1	b2	b3	b4	b5
0,0274					

Denominator

a0	a1	a2	a3	a4
0,000765	1,29E-5	8,878E-12		

OK Cancel Help

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{JLs^2 + (JR + Lb)s + bR + K^2}$$