Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

Symulacja systemów mechtronicznych

Wektor stanu
Wektor wyjściowy

Zakres tematyczny

- ***Definicja wektora stanu, model zmiennych stanu.***
- ***Wyznaczanie wektora stanu z układu równań***
- ***Wektor wyjściowy***
- ***Komputerowy model obiektu z wykorzystaniem wektora stanu i wektora wyjściowego***

Wektor stanu

Zmienne stanu *są wielkościami fizycznymi, których przebiegi w funkcji czasu charakteryzują zachowanie się układu.*

Wektor stanu: *najmniejszy zbiór wielkości x(t) taki, że gdy znany jest zbiór (**wektor**) wartości zmiennych stanu w chwil* t_0 *oraz przebieg **wielkości wejściowych** u(t) (wymuszenia i zakłócenia) w przedziale* $[t_0, t]$*, to można wyznaczyć przebiegi czasowe zmiennych stanu x(t) oraz **wielkości wyjściowych** y(t) w tym przedziale.*

$u_k(t)$ → $x(t)=[x_1(t), x_2(t) \ldots x_i(t)]$ → $y_n(t)$

Wektor stanu

Przykład: dla równania różniczkowego

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+2u$$

i przyjętego wektora stanu [x_1,x_2]=[y,v]

$$\frac{dy}{dt}=v$$

$$\frac{du}{dt}+2u=u(t)$$

***Wektor stanu** dla zmiennych **y** i **v** można zapisać jako*

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=v\\[2ex]\dfrac{dv}{dt}=-2v-2y+u(t)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

Wektor stanu

lub ogólnie dla [y, v]= [x_1,x_2]

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Leftrightarrow \quad x' = Ax + Bu$$

$$\text{gdzie}: \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wektor stanu, wektor wyjściowy

Wektor stanu $[x_1, x_2]^T$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

Może być zapisany w krótszej formie jako

$$\mathrm{x}' = \mathrm{A}\,\mathrm{x} + \mathrm{B}\,\mathrm{u}$$

gdzie: ***u*** *jest wektorem wejściowym (sterowanie),* ***x*** *jest wektorem stanu,* ***A*** *i* ***B*** *macierze systemowe.*

Można zdefiniować tzw. ***Wektor wyjściowy*** *dla danego wektora stanu*

$$z = \mathbf{C}\,x + \mathbf{D}\,u$$

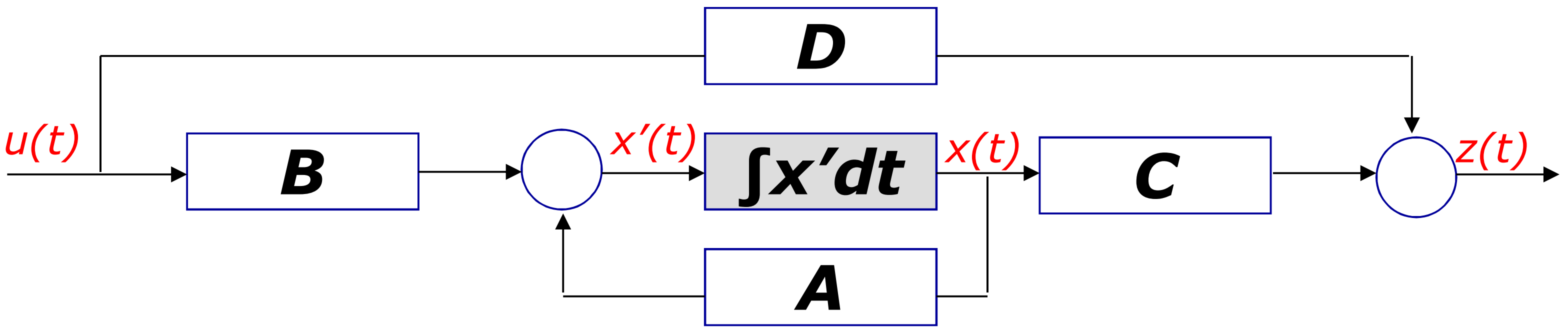
where: ***u*** *–wektor wejściowy,* ***x*** *wektor stanu,*

C *– macierz wyjściowa modelu obiektu (jak zmienne wejściowe zależą od składowych wektora stanu),*

D *– macierz przejścia modelu (jak zmienne wyjściowe zależą od wektora wejściowego– zwykle* ***D****=****0****).*

WekTor stanu, wektor wyjściowy

$$x' = Ax + Bu \qquad z = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$



Wyznaczanie wektora stanu

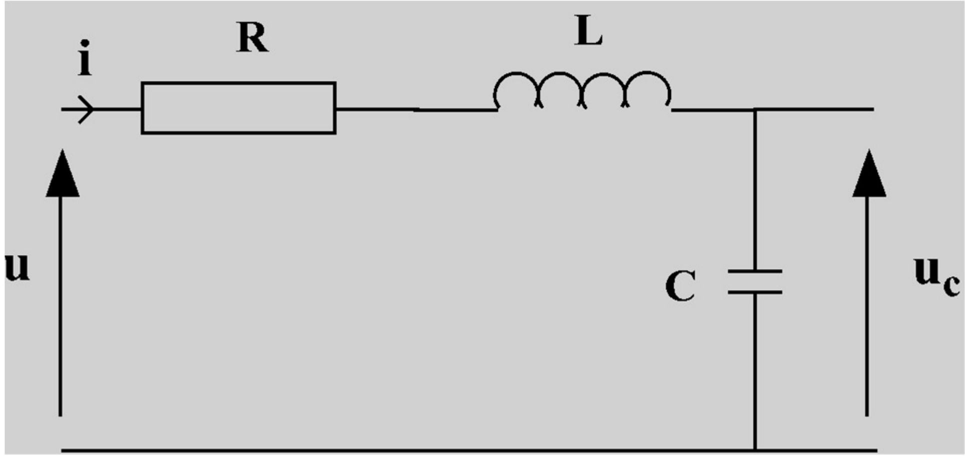
1. ***Wyznaczyć wielkości $x_1(t)$ ... $x_i(t)$, które będą składowymi wektora stanu.***

2. ***Opisać układ za pomocą równań różniczkowych pierwszego rzędu z wykorzystaniem zmiennych stanu.***

3. ***Określić macierze współczynników A, B, C, D.***

Wyznaczanie wektora stanu

Przykład: układ RLC



Równania stanu:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

Wektor stanu:

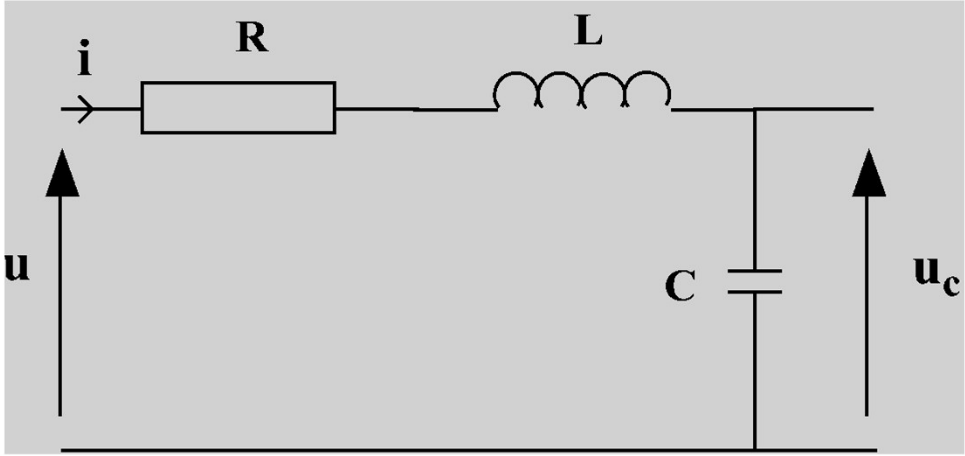
$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix}$$

Pochodna wektora stanu:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_c(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)$$

Wyznaczanie wektora stanu



Zapis macierzowy:

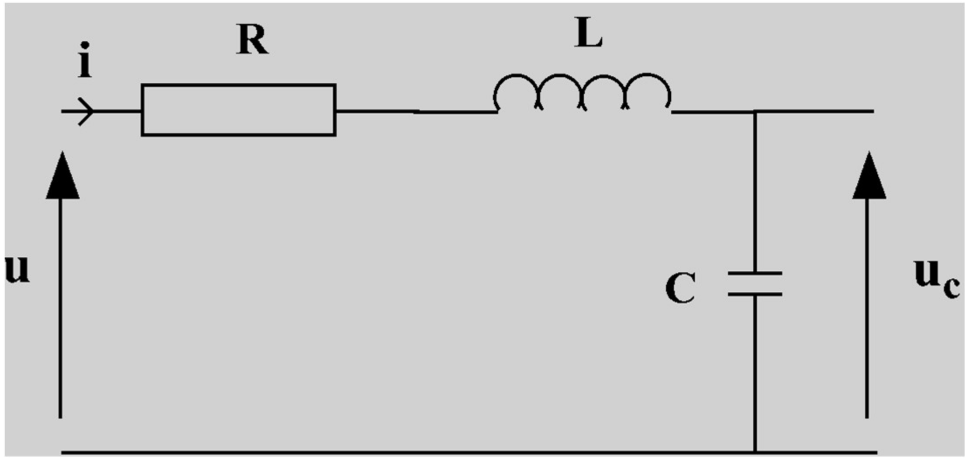
$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} u_c(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathrm{x}' = \mathrm{A}\,\mathrm{x} + \mathrm{B}\,\mathrm{u}$$

Wyznaczanie wektora stanu



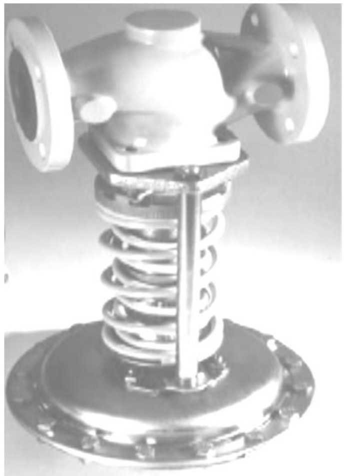
Chcąc obserwować spadek napięcia na rezystancji R przyjmujemy wektor wyjściowy

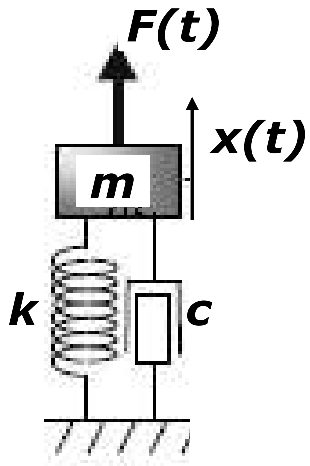
$$U_R = R \cdot i(t) + 0 \cdot U_c$$

$$z = Cx + Du \quad \Leftrightarrow \quad z = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ U_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Opis systemu mechatronicznego – wektor stanu

Przykład:





$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}F(t)-\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}-\frac{k}{m}x$$

Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

Wektor stanu [x,v]^T:

$$\mathrm{x}' = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F(t)}{m} - \dfrac{c}{m}v - \dfrac{k}{m}x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

Jeżeli: $\mathrm{F_{spr}} = \mathrm{kx};$ $\quad \mathrm{F_{damp}} = \mathrm{cv};$ $\quad \mathrm{x_{out}} = \mathrm{x};$

to wektor wyjściowy $z = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$ *ma postać*

$$\begin{bmatrix} F_{spr} \\ F_{damp} \\ x_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

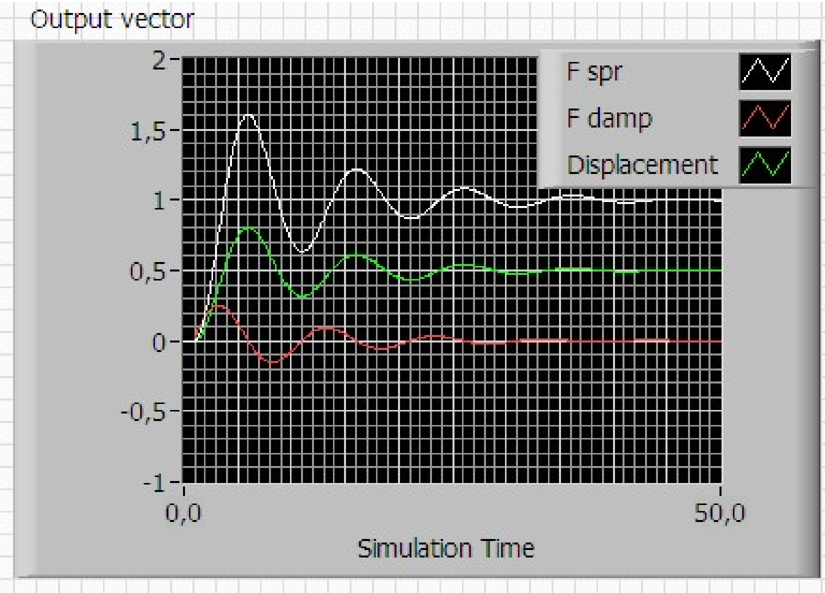
g

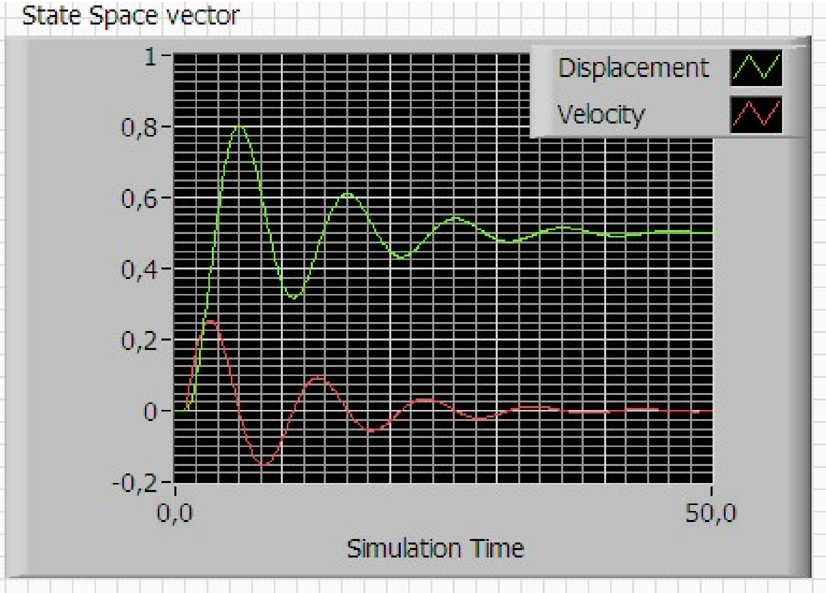
Opis systemu mechatroniczego – wektor stanu

*Dla wartości parametrów **m=5**, **c=1** i **k=2**:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} F(t) \qquad \begin{bmatrix} F_{spr} \\ F_{damp} \\ x_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

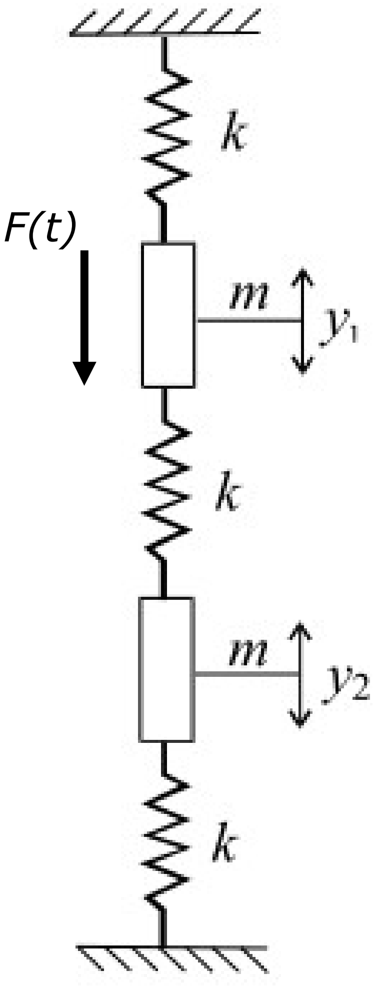
otrzymujemy wyniki





Zadanie:

Wyznaczyć wektor stanu dla układu drgającego i zbudować model symulacyjny



$$\begin{cases} m y_1'' + k y_1 + k(y_1 - y_2) = F(t) \\ m y_2'' + k y_2 + k(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{wektor stanu}: [y_1, v_1, y_2, v_2]^T$$

$$\text{gdzie}: \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt} \qquad v_2 = \frac{dy_2}{dt}$$

Zadanie:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = v_1 \\ m\dfrac{dv_1}{dt} + ky_1 + k(y_1 - y_2) = F(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = v_2 \\ m\dfrac{dv_2}{dt} + ky_2 + k(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = v_1 \\ \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{k}{m}y_1 - \dfrac{k}{m}(y_1 - y_2) + \dfrac{1}{m}F(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = v_2 \\ \dfrac{dv_2}{dt} = -\dfrac{k}{m}y_2 - \dfrac{k}{m}(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Zadanie:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt} = v_1 \\
\dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{k}{m} y_1 - \dfrac{k}{m}(y_1 - y_2) + \dfrac{1}{m} F(t) \\
\dfrac{dy_2}{dt} = v_2 \\
\dfrac{dv_2}{dt} = -\dfrac{k}{m} y_2 - \dfrac{k}{m}(y_2 - y_1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt} = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot F(t) \\
\dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{2k}{m} y_1 + 0 \cdot v_1 + \dfrac{k}{m} y_2 + 0 \cdot v_2 + \dfrac{1}{m} F(t) \\
\dfrac{dy_2}{dt} = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot F(t) \\
\dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{k}{m} y_1 + 0 \cdot v_1 - \dfrac{2k}{m} y_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot F(t)
\end{cases}
$$

Zadanie:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 0\cdot y_1 + 1\cdot v_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot v_2 + 0\cdot F(t) \\ \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{2k}{m} y_1 + 0\cdot v_1 + \dfrac{k}{m} y_2 + 0\cdot v_2 + \dfrac{1}{m} F(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 0\cdot y_1 + 0\cdot v_1 + 0\cdot y_2 + 1\cdot v_2 + 0\cdot F(t) \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{k}{m} y_1 + 0\cdot v_1 - \dfrac{2k}{m} y_2 + 0\cdot v_2 + 0\cdot F(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{2k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)}$$

Zadanie:

siły w sprężynach :

$$F_1 = k \cdot y_1$$

$$F_2 = k \cdot (y_1 - y_2) = k \cdot y_1 - k \cdot y_2$$

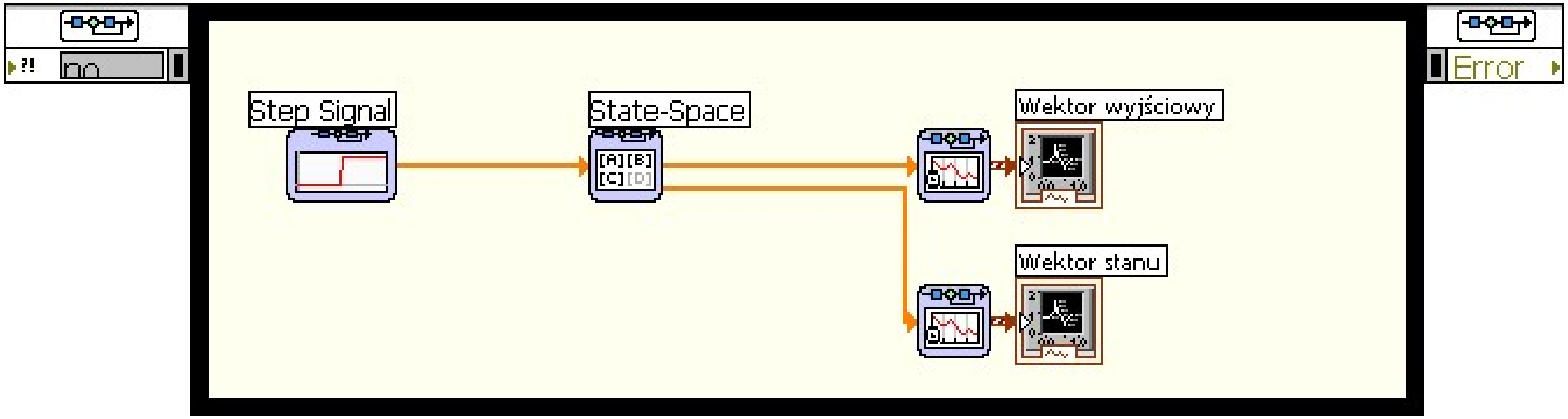
$$F_3 = k \cdot y_2$$

wektor wyjściowy :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$$

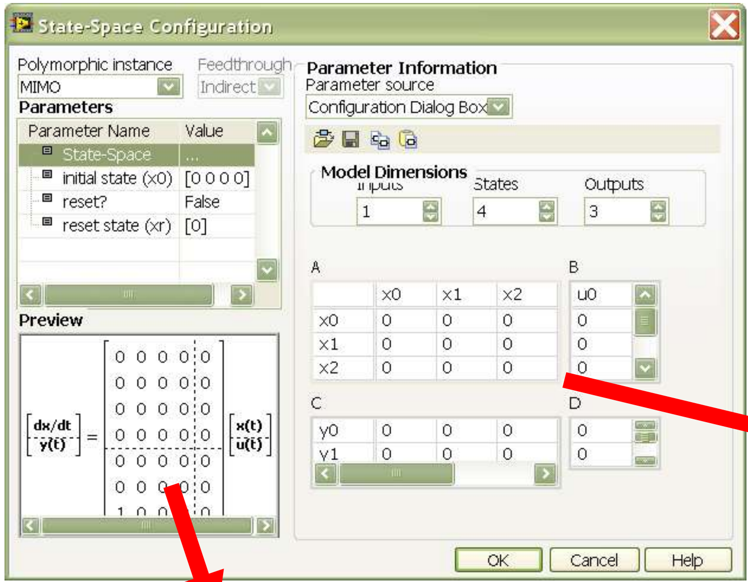
Zadanie:

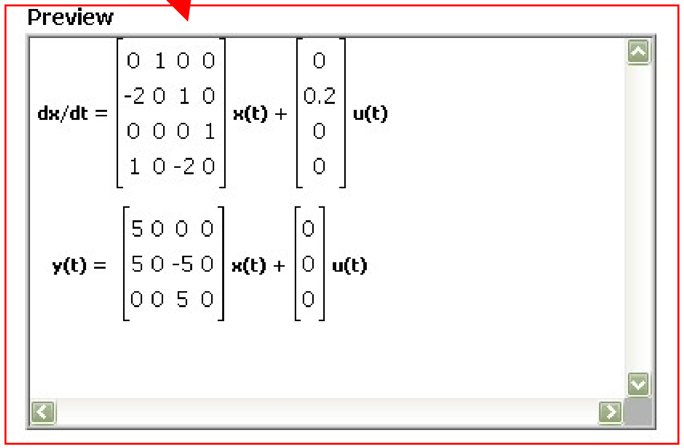
1. *Model komputerowy*

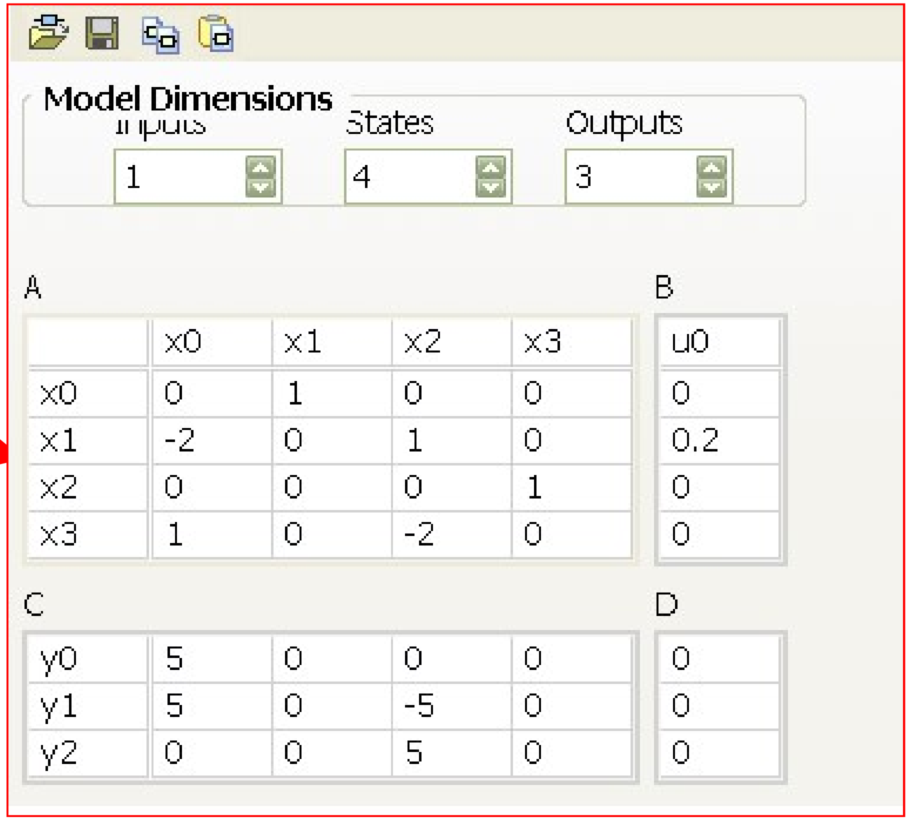


Zadanie:

2. *Wprowadzenie danych (macierze A, B, C, D)*

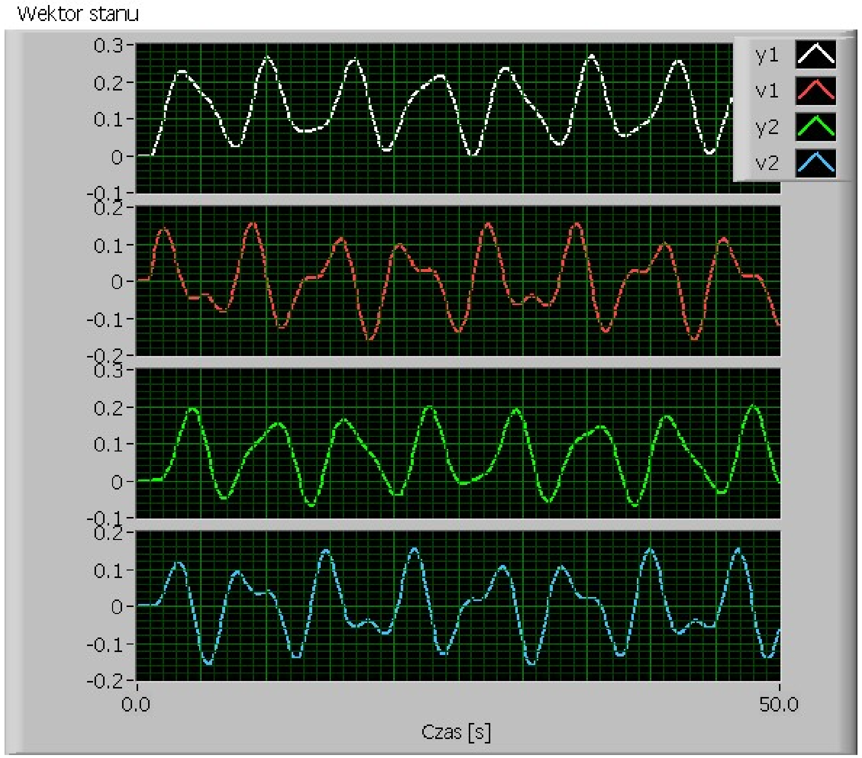


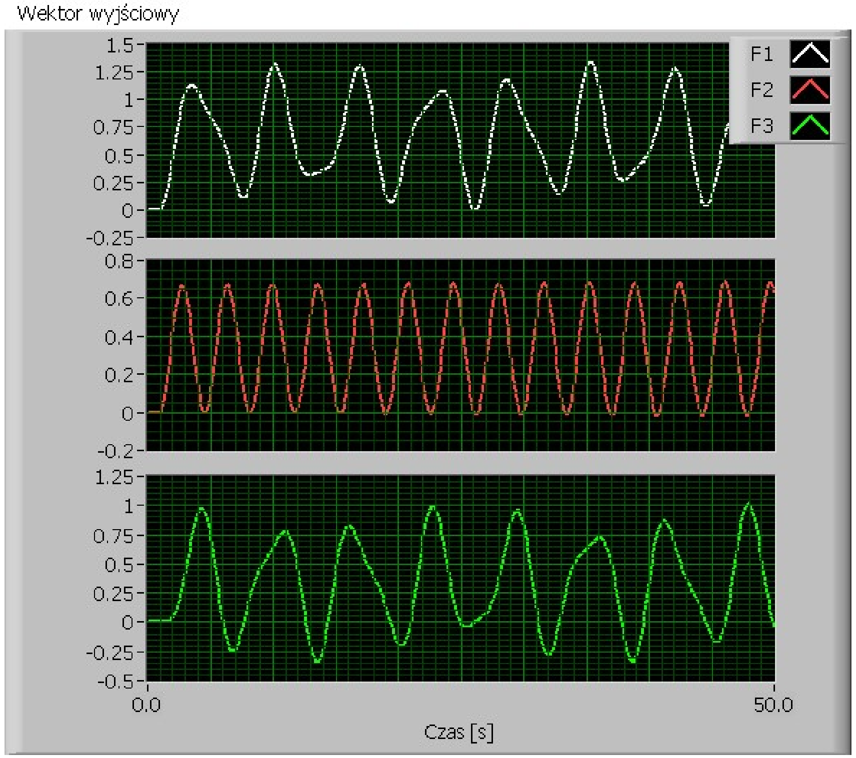




Zadanie:

3. Wyniki





Matlab/Simulink